

Spectra 基本观念

Liu Ou(刘欧)

2025-04-29

Contents

1. 上同调理论与 Brown 可表性定理	6
1.1. 同伦拉回与同伦推出	6
1.1.1. 同伦群, 连合与连通	9
1.2. Eilenberg–MacLane 空间与上同调	11
1.2.1. 定义以及基本性质	11
1.2.2. Eilenberg–MacLane 空间的构造	11
1.2.3. Eilenberg–MacLane 空间与上同调	12
1.3. 谱与广义上同调	13
1.4. Brown 可表性定理	14
2. 稳定范畴	22
2.1. 基础知识	23
2.1.1. 模型范畴补遗	23
2.1.2. 实现-脉伴随	24
2.1.3. Beck–Chevalley 自然变换	24
2.1.4. Grothendieck–Lurie 构造	24
2.1.5. 左 Bousfield 局部化	26
2.1.6. 可表现范畴	28
2.1.7. 对称幺半范畴, 交换代数, 模	30
2.1.8. 纬悬与环路	33
2.2. 稳定范畴	33
2.2.1. 定义	33
2.2.2. 稳定范畴与 Abel 范畴	36
2.2.3. 稳定范畴与三角范畴	39
2.2.4. 谱的范畴	40
2.2.5. 谱的展示	44
2.2.6. t-结构	45

Contents

2.3. 谱的张量积	50
2.3.1. Lurie 张量积	50
2.3.2. 谱的张量积	52
3. 同调代数	54
3.1. 同调代数	54
3.1.1. Dold–Kan 对应	55
3.1.2. 微分分次范畴	58
3.1.3. 导出范畴	60
3.1.4. 导出范畴的泛性质	64
3.2. Lawever 理论与生象化	65
3.2.1. 生象化	65
3.2.2. Abel 范畴的非 Abel 导出范畴	68
Bibliography	70

引言

序言

本文为代数拓扑讨论班同伦论部分中关于谱 (Spectrum) 的部分, 将从三个角度来看待谱, 分别为:

1. (拓扑角度) 用以表示广义上同调的一串空间;
2. (范畴角度) 生象范畴的稳定化;
3. (代数角度) 用以标识 $\mathbb{E}_\infty$ -群的结构 (将 $\mathbb{E}_\infty$ -群视为连合谱).

本文主要参考 [Davies and Tatum, 2024], [Hebestreit, 2021], [Cnossen, 2025b] 以及 [Achim Krause, 2024]. 部分定理虽然不会予以证明, 但是仍然会给出相应的超链接 (基本上可以做到跳转到对应页面).

注记. 本文完全不追求建立一套自足的体系, 只为介绍稳定同伦论中的最基础的概念, 因为本文实际上是代数拓扑讨论班的讲义.

代数角度可观察 [Cnossen, 2025b, Chapter 5], 由于时间关系, 本文将不会写这一部分内容.

符号与约定

若无特殊说明, 本文中范畴均指 $(\infty, 1)$ -范畴, 将经典的范畴称为 1-范畴, 并且默认读者学过一些基础的 $(\infty, 1)$ -范畴理论 (其实读者也可以闭上眼睛装作都是范畴), 若无对应基础知识, 可参考[六函子理论讨论班](#)的回放 (前三节内容) 以及[香蕉空间](#).

- CW 复形有关符号与[香蕉空间](#)保持一致;
- 空间是指同伦等价于 CW 复形的拓扑空间, 全体空间所构成的范畴记为 $\mathcal{S}$, 而其同伦范畴记为 $h\mathcal{S}$, 此时我们只关心同伦信息, 熟悉模型范畴或代数拓扑的读者此时可以知

Contents

晓此时弱同伦等价即为同伦等价 (因为可以过渡到 CW 复形的弱同伦等价, 而 CW 复形为 Quillen-Serre 模型结构的双纤维性对象);

- 本文在交换方块中使用 PB 作为 pullback 的缩写表示拉回图表, 而使用 PO 作为 pushout 表示推出图表. 而同伦拉回和同伦推出分别使用 hPB 和 hPO. 使用这种符号主要是为第一章服务.
- 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, 则 $\text{Ar}(\mathcal{C}) = \text{Fun}([1], \mathcal{C})$ 表示箭头范畴.
- Cat 是指 $(\infty, 1)$ -范畴所构成的 $(\infty, 1)$ -范畴, 而 1-范畴所构成的 $(\infty, 1)$ -范畴记为 $\text{Cat}^{(1)}$, 它是 Cat 的全子范畴. $\widehat{\text{Cat}}$ 是全体大 $(\infty, 1)$ -范畴所构成的 (超大) $(\infty, 1)$ -范畴;
- Fun^L 是指全体保持余极限函子所张成的全子范畴, Fun^R 是指全体保持极限的函子所张成的全子范畴;
- 当我们不强调 1-范畴时, 总是会省略脉的符号 (注意到 Δ^n 是 $[n]$ 的脉, 这可能会与平移造成混淆, 我们这个时候有时使用 Δ^n 来避免符号上的冲突), 此外, 我们往往使用花体版本的符号来表示一个术语的高阶版本, 比如导出 1-范畴记为 $\mathcal{D}$, 导出 $(\infty, 1)$ -范畴记为 $\mathcal{D}$.

第 1 章 上同调理论与 Brown 可表性定理

注记 1.0.1. . 本章全文中所使用范畴均为经典的 1-范畴.

1.1 同伦拉回与同伦推出

在一切开始之前, 我们先讲一些同伦论上的操作, 众所周知, 在同伦论中我们看重同伦关系更甚于同构, 为此还特意提出了同伦范畴 $h\mathcal{S}$ 以对于同伦等价关系进行局部化.

但是在 $\mathcal{S}$ 中, 我们难以刻画出一个在同伦等价意义下不变的拉回和推出 (因为一般的拉回和推出都是在同构意义下不变的), 而为了做到这一点, 我们就需要让我们的图表不再是严格交换, 而是在相差一个同伦的意义下交换

比如说图表

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f'} & Y \\ \downarrow g' & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z. \end{array}$$

我们想让它在同伦意义下交换, 那么我们就需要在 L 上做手脚, 使得 $fg' \sim gf'$, 即构造 $H: [0, 1] \times L \rightarrow Z$ 使得对于任意 $l \in L$ 都有 $H(0, l) = fg'(l)$ 且 $H(1, l) = gf'(l)$. 因此可以归结出同伦拉回与同伦推出的定义

定义 1.1.1. . 考虑 $\mathcal{S}$ 中的图表

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z. \end{array}$$

定义其同伦极限 (即同伦拉回) $X \times_Z^h Y$ 为

$$X \times_Z^h Y := X \times_{Z, s} Z^{[0, 1]} \times_{Z, t} Y = \{(x, p, y) \in X \times Z^{[0, 1]} \times Y : p(0) = f(x), p(1) = g(y)\}.$$

分别记 $X \times_Z^h Y$ 到 X 和 Y 的投影为 $\mathbf{pr}_X$ 和 $\mathbf{pr}_Y$. 考虑同伦 $H: (X \times_Z^h Y) \times [0, 1] \rightarrow Z$. 注意到 H 给出 $f\mathbf{pr}_X$ 到 $g\mathbf{pr}_Y$ 的同伦, 即

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z^h Y & \xrightarrow{\mathbf{pr}_Y} & Y \\ \mathbf{pr}_X \downarrow & \nearrow H \sim & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z. \end{array}$$

注意到此时我们考虑的 $\mathcal{S}$ 实际上应该是 $(2, 1)$ -范畴, 不然无以容纳这一同伦信息. 其泛性质表述如下: 给定带有态射 $T \rightarrow X \times_Z^h Y$ 的空间 $T \in \mathcal{S}$, 都存在同伦意义下唯一的 $t_X: T \rightarrow X$ 以及 $t_Y: T \rightarrow Y$ 使得 $ft_X \sim gt_Y$.

为方便起见, 使用

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z^h Y & \xrightarrow{\mathbf{pr}_Y} & Y \\ \mathbf{pr}_X \downarrow & \text{hPB} & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z. \end{array}$$

表示同伦拉回

定义 1.1.2. . 考虑 $\mathcal{S}$ 中的图表

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow f & & \\ X & & \end{array}$$

定义其**同伦余极限** (即**同伦推出**) $X \sqcup_Z^h Y$ 为

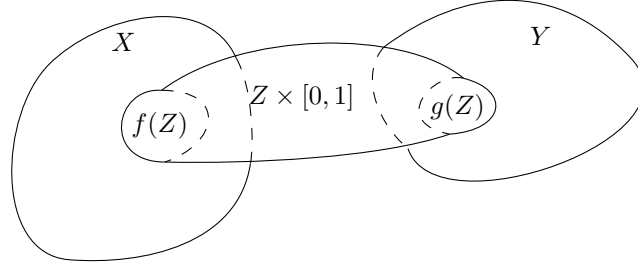
$$X \sqcup_Z^h Y := X \sqcup_{Z,0} (Z \times [0, 1]) \sqcup_{Z,1} Y = (X \sqcup Z \times [0, 1] \times Y) / \sim$$

此处等价关系 $\sim$ 是将 $(z, 0) \in Z \times [0, 1]$ 与 $f(z) \in X$ 以及 $(z, 1) \in Z \times [0, 1]$ 与 $g(z) \in Y$ 粘起来. 分别记两个分量到同伦推出的嵌入为 ι_X 和 ι_Y . 考虑同伦 $H: Z \times [0, 1] \rightarrow X \sqcup_Z^h Y$ 为 $(z, t) \mapsto (z, t)$, 使得其满足 $H_0 = \iota_X f$ 且 $H_1 = \iota_Y g$, 因此其定义了 $\iota_X f$ 到 $\iota_Y g$ 的同伦, 即

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & \nearrow H \sim & \downarrow \iota_Y \\ X & \xrightarrow{\iota_X} & X \sqcup_Z^h Y. \end{array}$$

其泛性质表述如下: 给定带有态射 $X \sqcup_Z^h Y \rightarrow T$ 的空间 $T \in \mathcal{S}$ 相当于给定 $t_X: X \rightarrow T$ 以及 $t_Y: Y \rightarrow T$ 使得 $t_X f \sim t_Y g$.

同伦推出可绘作下图



为方便起见, 使用

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & \text{hPO} & \downarrow \iota_Y \\ X & \xrightarrow{\iota_X} & X \sqcup_Z^h Y. \end{array}$$

表示同伦推出.

注记 1.1.3. . 从上述架构可以看出 $\mathcal{S}$ 不仅仅是 $(1, 1)$ -范畴, 我们的定义中需要用的它可逆的高阶态射, 所以其实应当被当作 $(\infty, 1)$ -范畴.

而后给出一些结构,

定义 1.1.4. . 给定态射 $f: X \rightarrow Y$, 则

- f 在 $y \in Y$ 处的**同伦纤维**是指以下同伦拉回

$$\begin{array}{ccc} f^{-1,h}(\{y\}) & \longrightarrow & * \\ \downarrow & \text{hPB} & \downarrow y \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

- f 的**同伦余纤维**是指以下同伦推出

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \text{pr} \downarrow & \text{hPO} & \downarrow \\ * & \longrightarrow & Y \sqcup_X^h *. \end{array}$$

其可以被具体地刻画为

$$Y \sqcup_X^h * := Y \sqcup_X (X \times [0, 1]) / X \times \{1\}$$

常将其记为 $C(f)$. 给定带有零伦 $gf \sim \text{const}_z$ 的 $g: Y \rightarrow Z$, 记其对应同伦为 H , 则 $H_0 = gf$, $H_1 = \text{const}_z$. 由此根据同伦推出的泛性质得到典范态射

$$C(f) \rightarrow Z, \quad y \mapsto g(y), \quad (x, t) \mapsto H(x, t).$$

称序列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 为**余纤维列**是指 $Z \simeq C(f)$.

例 1.1.5. . 取 $f = \text{id}_X$, 则同伦余纤维 $C(\text{id}_X)$ 即为 X 的**锥**, 记为 $C(X)$. 注意到 $C(f) = Y \sqcup_X C(X)$.

接下来考虑带点的情况,

注记 1.1.6. . 当 $(X, x) \in \mathcal{S}_*$ 为带点空间时, $x: * \rightarrow X$ 沿自身的同伦拉回即为 ΩX :

$$\Omega X = \Omega(X, x) := \{p: [0, 1] \rightarrow X: p(0) = p(1) = x\}$$

选定基点 const_x , 可将 ΩX 视为带点空间, 称为**环路空间**. 给定带点空间之间的态射 $(X, x) \rightarrow (Y, y)$, 不难发现其诱导出 $\Omega(f): \Omega(X) \rightarrow \Omega(Y), p \mapsto f \circ p$, 因此 Ω 定义出函子

$$\Omega: \mathcal{S}_* \rightarrow \mathcal{S}_*.$$

(X, x) 在 $\mathcal{S}_*$ 中的锥称为**约化锥**, 它被刻画为 $\tilde{C}(X) := C(X)/\{x\} \times [0, 1]$. 类似地, 对于带点空间间的态射 $f: X \rightarrow Y$, 可定义 f 的**约化同伦余纤维**为 $\tilde{C}(f) = Y \sqcup_X \tilde{C}(X)$. 对于带点空间间的态射链 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, 称其为**余纤维列**是指 $gf \sim \text{const}_*$ (这一条件是确保图表在同伦意义下交换) 且其诱导了同伦等价 $\tilde{C}(f) \simeq Z$.

例 1.1.7. . 令 $X \in \mathcal{S}$ 为空间, 则 $X \rightarrow *$ 的同伦余纤维被称为**韦悬**, 记为 SX . 当 $(X, x) \in \mathcal{S}_*$ 为带点空间时, 其**约化韦悬**定义为商 $\Sigma X := SX/(\{x\} \times [0, 1])$. 不难发现后者定义出函子 $\Sigma: \mathcal{S}_* \rightarrow \mathcal{S}_*$, 将 $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ 映为 $\Sigma(f)[(x, t)] := [(f(x), t)]$.

练习 1.1.8. . 说明具有伴随 $\Sigma \dashv \Omega$.

最终可以总结发现, 在 $\mathcal{S}_*$ 中对于带点空间 (X, x) , 有

$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \longrightarrow & * \\ \downarrow & \text{hPB} & \downarrow \\ * & \longrightarrow & X \end{array} \quad \text{以及} \quad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & * \\ \downarrow & \text{hPO} & \downarrow \\ * & \longrightarrow & \Sigma(X) \end{array}$$

分别为同伦拉回和同伦推出图表. 在随后两章中我们将对此进行更加深入的探索, 说明 Ω 是在降低一个维数而 Σ 是在提升一个维数.

1.1.1 同伦群, 连合与连通

定义 1.1.9. . 对于 $k \geq 0$ 与带点空间 $(X, x) \in \mathcal{S}_*$, 则定义 $\pi_k(X, x)$ 为

$$\pi_k(X, x) := [S^k, X]_*$$

不难发现

$$\pi_k(\Omega X) = [S^k, \Omega X]_* \simeq [\Sigma S^k, X]_* = \pi_{k+1}(X).$$

命题 1.1.10. . 对于 $k \geq 1$ 时, $\pi_k(X)$ 具有群结构, 特别地, 当 $k \geq 2$ 时, $\pi_k(X)$ 具有 *Abel* 群结构.

证明. 群结构由 ΩX 为群对象, 且 $k \geq 1$ 时 $\pi_k(X) \simeq \pi_{k-1}(\Omega X)$ 可知, 而 $k \geq 2$ 时 $\pi_k(X) = \pi_{k-2}(\Omega\Omega X) = [S^{k-2}, \Omega(\Omega X)]$, 这相当于说 $\pi_k(X)$ 上具有两重不同的运算, 根据 [Eckmann–Hilton 论证](#) 即知具有交换性. $\square$

因此在 $k \geq 1$ 时, 将 $\pi_k(X, x)$ 称为**同伦群**. 而在 $k = 0$ 时, 称为连通分支.

注记 1.1.11. . 不难发现当 $k = 1$ 时 $\pi_1(X, x)$ 即为基本群.

定义 1.1.12. . 对于 $n \geq 1$, 称空间 X 是 **n -连通** 的是指其为连通的且同伦群在 $k \leq n$ 时处平凡. 此时也称 X 是 **$(n+1)$ -连合** 的. 一般记 $\mathcal{S}^{\geq n} \subseteq \mathcal{S}$ 为 n -连合空间所构成的范畴.

注记 1.1.13. . 一般我们描述谱的时候比较喜欢用连合. 不过在本文中, 哪个比较方便就用哪个.

定义 1.1.14. . 设 X, Y 为空间, $f: X \rightarrow Y$ 是连续映射. 称 f 为**弱同伦等价**, 如果它满足以下性质:

- f 诱导 π_0 的双射:

$$f_*: \pi_0(X) \simeq \pi_0(Y).$$

- 对任意自然数 $n > 0$ 及任意 $x \in X$, f 诱导第 n 阶同伦群的同构:

$$f_*: \pi_n(X, x) \simeq \pi_n(Y, f(x)).$$

此时, 也称空间 X, Y **弱同伦等价**. 一般地, 拓扑空间的弱同伦等价是指上述关系生成的等价关系.

定理 1.1.15. (Whitehead). 设 X, Y 为 *CW* 复形, 若 $f: X \rightarrow Y$ 为弱同伦等价则 $f: X \rightarrow Y$ 为同伦等价.

警告 1.1.16. . Whitehead 定理成立的条件是 $f: X \rightarrow Y$ 为一个态射时, 而非是逐 π_i 都存在同构, 一个著名的反例是考虑 $X := S^2 \times \mathbb{RP}^3$ 与 $Y := S^3 \times \mathbb{RP}^2$ 的情况, 它们具有相同的万有覆盖 $S^2 \times S^3$ 因此对于 $n \geq 2$ 时, $\pi_n(X) \simeq \pi_n(S^2 \times S^3) \simeq \pi_n(Y)$ (参见 [\[Hatcher, 2002, § 4.1 习题 4.\]](#)), 而在 $n = 1$ 时, 由于二者均为 $\mathbb{Z}/2$ 作用得到 X 和 Y 的基本群均为 $\mathbb{Z}/2$. 但是若具体计算它们的同调群会发现它们的同调群不相等, 使用 Künneth 公式计算即可.

此外还具有一个反例, $S^2 \times S^2$ 和 $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ 的同伦群和同调群均逐次同构 (π_0 为双射), 但是仍然非同伦等价, 可参见 [Math StackExchange](#).

1.2 Eilenberg–MacLane 空间与上同调

1.2.1 定义以及基本性质

定义 1.2.1. . 对于 $n > 0$ 以及群 G (当 $n \geq 2$ 时交换), 称连通空间 $X \in \mathcal{S}$ 为 (G, n) -型 Eilenberg–MacLane 空间是指

$$\pi_i(X) \simeq \begin{cases} G, & i = n \\ *, & \text{其它情况.} \end{cases}$$

一般将 (G, n) -型 Eilenberg–MacLane 空间记为 $K(G, n)$, 此处 K 应当来源于德语 Klass (并不确定, 在 [Eilenberg and MacLane, 1945] 中只给出了其直接构造, 并未说明名词来源), 表示类.

以下给出一些 Eilenberg–MacLane 空间的例子

例 1.2.2. . 1. S^1 即为 $K(\mathbb{Z}, 1)$;

2. $\mathbb{RP}^\infty \simeq K(\mathbb{Z}/2, 1)$, 为说明这一点, 只需观察到 $\mathbb{RP}^\infty$ 的万有覆叠 S^∞ 是可缩的并且有均匀作用 $\mathbb{Z}/2 = \{\pm 1\}$ 通过 $(\pm 1, x) \mapsto \pm x$ 作用于 S^∞ 使得 $S^\infty / \sim \simeq \mathbb{RP}^\infty$ 即可;

3. $\mathbb{CP}^\infty \simeq K(\mathbb{Z}, 2)$, 因为有纤维列 $S^1 \rightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{CP}^\infty$, 再次使用 $S^\infty \simeq *$ 这一事实, 可以计算得到 $\pi_{i+1}(\mathbb{CP}^\infty) \simeq \pi_i(S^1)$, 再利用 $S^1 \simeq K(\mathbb{Z}, 1)$ 即可.

命题 1.2.3. . 令 $n > 0$, G 为群 (当 $n \geq 2$ 时为交换群), 则 $\Omega K(G, n) \simeq K(G, n-1)$.

证明. 直接计算即可

$$\pi_i(\Omega K(G, n)) = [S^i, \Omega K(G, n)]_* \simeq [\Sigma S^i, K(G, n)]_* \simeq [S^{i+1}, K(G, n)]_* = \pi_{i+1}(K(G, n)).$$

□

因此在同构意义下, 我们有以下序列

$$K(G, 0) \xleftarrow{\Omega} K(G, 1) \xleftarrow{\Omega} K(G, 2) \xleftarrow{\Omega} \cdots \xleftarrow{\Omega} K(G, n) \xleftarrow{\Omega} \cdots \quad (1.1)$$

1.2.2 Eilenberg–MacLane 空间的构造

以下对于 $n > 1$ 时给出一种构造 Eilenberg–MacLane 空间的方式, 这亦可表明任意 Eilenberg–MacLane 空间总能由 CW 复形构造出, 对于 $n = 1$ 的情况参见 [Hatcher, 2002, Example 1B.7].

回忆 Hurewicz 定理:

定理 1.2.4. (Hurewicz). 令 $n \geq 1$, 对于 n -连合的拓扑空间 X , 有

- $n = 1$ 时, $H_1(X)$ 是 $\pi_1(X)$ 的交换化;
- $n > 1$ 时, $H_n(X) = \pi_n(X)$, 且对于 $i < n$ 有 $H_i(X) = \pi_i(X) = 0$.

首先构建一个 n -连合的 $(n+1)$ 维 CW-复形 X , 使得 $\pi_n(X) \simeq G$, 为此考虑底空间 $\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$, 这样可以得到 n -连通空间, 而后沿态射 φ_{β} 粘接上 $(n+1)$ -胞腔, 即有推出图表

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_{\beta} S^n & \xrightarrow{\varphi_{\beta}} & \bigvee_{\alpha} S^n \\ \downarrow & \text{PO} & \downarrow \\ \bigvee_{\beta} D^{n+1} & \longrightarrow & X. \end{array}$$

因此由 Mayer-Vietoris 序列可知

$$H_n(X) \simeq \left(\bigoplus_{\alpha} \mathbb{Z} \right) / \langle [\varphi_{\beta}] \rangle,$$

此处 $[\varphi_{\beta}]$ 表示 φ_{β} 的同伦类. 而我们知道任意群均可表为某个自由群的商, 因此只需选择合适的 β 即可, 此时根据定理 1.2.4 可知 $G = H_n(X) \simeq \pi_n(X)$.

而后只需粘接高阶胞腔并且保证更高阶的同伦群都消失即可. 为此归纳地给出构造, 对于 $\phi_{\alpha}: S^{n+1} \rightarrow X$, 取 $Y := X \sqcup_{\phi_{\alpha}} D^{n+2}$, 由 CW 逼近可给出 $X \hookrightarrow Y$, 而对于 $i \leq n$, 这诱导出 π_i 上的同构, 此外由于 $\pi_{n+1}(Y)$ 中的元素实际上为 $S^{n+1} \rightarrow X$, 因此有 $\pi_{n+1}(Y) = 0$. 以此归纳构造得到空间 $K(G, n)$.

1.2.3 Eilenberg-MacLane 空间与上同调

以下命题给出 Eilenberg-MacLane 空间与上同调之间的关系.

定理 1.2.5. . 令 $n > 0$ 且 G 为 Abel 群, 对于空间 $X \in \mathcal{S}$ 有自然双射 $[X, K(G, n)]_* \simeq H^n(X; G)$.

证明. [Hatcher, 2002, Proposition 4.57.], 或根据定理 1.4.5 计算得到 □

因此, 固定 Abel 群 G , 我们知道每个 $K(G, n)$ 就对应于 G -系数 n -阶上同调群, 而在 (1.1) 中所给出的链相当于全体的 G -系数上同调. 我们将这种结构称为谱.

定义 1.2.6. . 预谱 X_* 由以下信息构成:

- 一系列带点空间 $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$;
- 对任何 $n \geq 0$, 有保持基点的态射 $\sigma_n: \Sigma X_n \rightarrow X_{n+1}$ 表示升维.

称 X 为 **谱**, 是指对于任何 $n \geq 0$, σ_n 的伴随态射 $X_n \rightarrow \Omega X_{n+1}$ 为同伦等价.

给定谱 $Y_* = (Y_n)_{n \geq 0}$, 则谱之间的态射 $f: X_* \rightarrow Y_*$ 是一列带点态射 $(X_n \xrightarrow{f_n} Y_n)_n$ 并且满足以下相容性条件: 存在同伦 H_n 使得以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{\sim} & \Omega X_{n+1} \\ \downarrow f_n & \swarrow H_n & \downarrow \Omega f_{n+1} \\ Y_n & \xrightarrow{\sim} & \Omega Y_{n+1}. \end{array}$$

可以把谱视为某种烤串, 每个拓扑空间就是烤串上的肉, 虽然这样疑似并不合适.

例 1.2.7. . 固定 Abel 群 G , 定义 A 的 **Eilenberg–MacLane 谱** 为 $H(A)_n := K(G, n)$.

1.3 谱与广义上同调

以下我们探究一个问题:

更广义的上同调是否能够被某个谱所表出?

答案是肯定的.

不过我们应该先确定什么是广义上同调.

定义 1.3.1. . **广义上同调理论** (或简称为**上同调理论**) 是指由以下信息所构成的二元组 (E^*, ∂)

- $E^*: hS_*^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}^{\mathbb{Z}}$ 为函子,
- **韦悬同构**

$$\partial: E^*(-) \xrightarrow{\sim} E^{*+1}(\Sigma(-)).$$

满足以下条件:

- (楔和) 对于任意一族带点空间 $\{X_i\}_{i \in I}$, 含入函子 $\iota_i: X_i \hookrightarrow \bigvee_{i \in I} X_i$ 诱导出自然同构

$$(\iota_i^*)_{i \in I}: E^*\left(\bigvee_{i \in I} X_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} E^*(X_i).$$

特别地, 当 $I = \emptyset$ 时, $E^*(*) \simeq 0$;

- (正合性) 带点空间的余纤维列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 诱导出正合列

$$E^*(Z) \xrightarrow{g^*} E^*(Y) \xrightarrow{f^*} E^*(X)$$

注记 1.3.2. (映射锥). 事实上, 给定余纤维列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, 我们可以继续往后求余纤维, $Y \rightarrow Z$ 的余纤维等价于 $\Sigma(X)$ (在同调代数中的类比是映射锥), 而 $Z \rightarrow \Sigma(X)$ 的余纤维是 $\Sigma(Y)$. 据此给出一串余纤维列, 称为 **Puppe 序列**:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow \Sigma(X) \xrightarrow{\Sigma(f)} \Sigma(Y) \xrightarrow{\Sigma(g)} \Sigma(Z) \rightarrow \Sigma^2(X) \rightarrow \cdots$$

作用上函子 E^* 后给出一串长正合列

$$\cdots \xrightarrow{f^*} E^{n-1}(X) \rightarrow E^n(Z) \xrightarrow{g^*} E^n(Y) \xrightarrow{f^*} E^n(X) \rightarrow E^{n+1}(Z) \rightarrow \cdots$$

注记 1.3.3. (相对上同调). 对于每个上同调理论 E^* , 对于 CW-对 (X, A) 可定义**相对上同调** $E^*(X, A) := E^*(X/A)$, 根据注记 1.3.2 可用余纤维列 $A_+ \rightarrow X_+ \rightarrow X/A$ 恢复出相对上同调的长正合列 (参见 [Hatcher, 2002, page 199]).

以下说明每个谱都可以建立起一种上同调理论

构造 1.3.4. . 令 $E = (E_n)_{n \geq 0}$ 为谱. 定义 $E^*: hS_*^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}^{\mathbb{Z}}$ 为

$$E^k(X) := \begin{cases} [X, E_k]_*, & k \geq 0 \\ [\Sigma^{-k}X, E_0]_*, & k < 0. \end{cases}$$

给定同伦等价 $E_k \simeq \Omega E_{k+1} \simeq \Omega^2 E_{k+2}$, 由与命题 1.1.10 相似的构造可知 $E^k(X)$ 具有 Abel 群结构. 最后构造 ∂ , 当 $k \geq 0$ 时它由下式给出

$$\partial: E^k(X) = [X, E_k]_* \simeq [X, \Omega E_{k+1}]_* \simeq [\Sigma X, E_{k+1}] = E^{k+1}(\Sigma X),$$

而 $k < 0$ 时, 它定义为 $E^k(X) = [\Sigma^{-k}X, E_0]_* \xrightarrow{\sim} [\Sigma^{-(k+1)}\Sigma X, E_0]_* = E^k(\Sigma X)$ 这一同构.

命题 1.3.5. . 令 E 为谱, 则 (E^*, ∂) 确实构成上同调理论.

证明. 对于同伦态射 $f \sim g: X \rightarrow Y$, 其诱导出相等的 $f^*, g^*: E^k(X) \rightarrow E^k(Y)$, 因此 E^k 是良定义的. 给定一族带点空间 $\{A_i\}_{i \in I}$, 从 $\bigvee_{i \in I} A_i$ 到 E_k 的态射对应于一族态射 $A_i \rightarrow E_k$, 由于这一过程保持带点同伦等价类, 因此得到

$$E^k\left(\bigvee_{i \in I} X_i\right) = \left[\bigvee_{i \in I} X_i, E_k\right]_* \simeq \prod_{i \in I} [X_i, E_k]_* = \prod_{i \in I} E^k(X_i);$$

还需说明 $k < 0$ 的情况, 而这由 Σ^{-k} 为 Ω^{-k} 的左伴随保持余极限接下来说明满足正合性, $\square$

本章的目标是说明满足一定条件的广义上同调理论就可以被谱表出.

1.4 Brown 可表性定理

定义 1.4.1. . 考虑函子 $F: hS_*^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$.

1. 称 F 满足**楔和公理**是指 F 保持乘积 (注意到 hS_*^{op} 中的乘积是楔和 $\vee$).

2. 称 F 具有 **Mayer–Vietoris 性质**是指对于任意连通带点空间所构成的同伦推出图表

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{k} & A \\ \downarrow l & \text{hPO} & \downarrow i \\ B & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

都诱导出满射

$$(i^*, j^*): F(X) \rightarrow F(A) \times_{F(C)} F(B).$$

注记 1.4.2. . 若 F 满足楔和公理, 那么对于 $X \in h\mathcal{S}_*$, 因为 $[\Sigma X, Y]_* \simeq [X, \Omega Y]_*$, 从而 ΣX 是 $h\mathcal{S}_*$ 中的余群对象, 因此可以根据 Eckmann–Hilton 论证可知 $F(\Sigma^2 X)$ 带有 Abel 群结构.

接下来解释如何由前文所提到的 Mayer–Vietoris 性质恢复出 Mayer–Vietoris 公式, 为此先给出一个事实

事实 1.4.3. . 给定同伦交换图

$$\begin{array}{ccccc} X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y_2 & & \\ & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & X_0 & \xrightarrow{f_0} & Y_0 & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 & & \\ & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & X & \xrightarrow{f} & Y & \end{array}$$

若左右两个面都是同伦推出, 则其水平方向上态射的同伦余纤维会给出同伦推出图表

$$\begin{array}{ccc} C(f_2) & \longrightarrow & C(f_0) \\ \downarrow & \text{hPO} & \downarrow \\ C(f_1) & \longrightarrow & C(f). \end{array}$$

验证是不难的, 只需说明 $(Y_0 \sqcup_{Y_2}^h Y_1) \sqcup_{X_0 \sqcup_{X_2}^h X_1}^h * \simeq (Y_0 \sqcup_{X_0}^h *) \sqcup_{Y_2 \sqcup_{X_2}^h *}^h (Y_1 \sqcup_{X_1}^h *)$ 即可, 将其放入 $(\infty, 1)$ -范畴中视为一般的推出使用余极限交换道理即可说明这点.

注记 1.4.4. . 若 $F: h\mathcal{S}_*^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ 穿过 Ab , 则 Mayer–Vietoris 性质结合事实 1.4.3 考虑图

表

$$\begin{array}{ccccc}
 * & \xrightarrow{f_2} & C & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & A & \xrightarrow{f_0} & A & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 B & \xrightarrow{f_1} & B & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & A \vee B & \xrightarrow{f} & X &
 \end{array}$$

可知 $A \vee B \rightarrow X$ 的余纤维即为 $C(f)$, 而根据事实 1.4.3 可知其为 $\Sigma C = C[1]$ (同理可证明 $X \rightarrow \Sigma C$ 的余纤维是 $\Sigma A \vee \Sigma B$). 将三角旋转变为余纤维列 $C \rightarrow A \vee B \rightarrow X$ 再作用上 F 后得到正合列

$$F(X) \xrightarrow{(i^*, j^*)} F(A) \times F(B) \xrightarrow{k^* - l^*} F(C)$$

若 F 还满足楔和公理, 那么余纤维列 $A \vee B \rightarrow X \rightarrow \Sigma C$ 可以延拓为长正合列

$$\cdots \rightarrow F(\Sigma A) \times F(\Sigma B) \xrightarrow{(\Sigma k)^* - (\Sigma l)^*} F(\Sigma C) \xrightarrow{\partial} F(X) \xrightarrow{(i^*, j^*)} F(A) \times F(B) \xrightarrow{k^* - l^*} F(C).$$

自此 Brown 可表性定理已然呼之欲出, 我们给出其陈述.

定理 1.4.5. (Brown). 令 $h\mathcal{S}_*^{\geq 1}$ 为连通带点空间所构成的范畴, 则函子 $F: (h\mathcal{S}_*^{\geq 1})^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ 可表当且仅当其满足楔和公理以及 Mayer-Vietoris 公式.

警告 1.4.6. . 带点以及连通性均不可缺少, 否则就可以找到反例.

以下为证明 Brown 可表性定理做一些准备工作, 根据 Yoneda 引理对于连通空间 Z , 以及 $\xi \in F(Z)$, 可以得到自然变换

$$T_\xi: [X, Z]_* \rightarrow F(X), \quad (X \xrightarrow{f} Z) \mapsto f^* \xi$$

其中 $f^* := F(f): F(Z) \rightarrow F(X)$. 称 ξ 关于 $n \geq 0$ 是 n -万有元是指

$$T_\xi: \pi_k(Z) = [S^k, Z]_* \rightarrow F(S)$$

在 $1 \leq k < n$ 上为双射, 且在 $k = n$ 时为满射. 称 ξ 是万有元是指对于任意 $n \geq 0$ 都有 ξ 为 n -万有元.

下述命题将告诉我们这些定义的作用.

命题 1.4.7. . 令 $F: (h\mathcal{S}_*^{\geq 1})^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ 为满足楔和公理以及 Mayer-Vietoris 公式. 则对于带点空间 $X \in \mathcal{S}_*$ 以及每个 $\eta \in F(X)$, 都存在带点空间 $Z_X \in \mathcal{S}_*$, 带点态射 $f_X: X \rightarrow Z_X$ 以及万有元 $\xi_X \in F(Z_X)$ 使得 $f_X^*(\xi_X) = \eta$.

证明. 我们分两步构造满足条件的 Z_X .

第一步. 首先构建一系列态射

$$X =: Z_0 \xrightarrow{f_0} Z_1 \xrightarrow{f_1} \dots$$

使得 $F(Z_n)$ 中的 n -万有元 ξ_n 满足 $f_n^*(\xi_{n+1}) = \xi_n \in F(Z_n)$, 且 $\xi_0 = \eta \in F(X)$. 通过对于 n 进行归纳来构造这一序列, 当 $n = 1$ 时, 我们可以试着定义出一个足够好的底空间 Z_1 , 即定义

$$Z_1 := X \vee \bigvee_{m \geq 1} \bigvee_{\gamma \in F(S^m)} S^m$$

如此一来根据楔和公理可知

$$F(Z_1) \simeq F(X) \times \prod_{m \geq 1} \prod_{\gamma \in F(S^m)} F(S^m),$$

此时不难发现可将 ξ_1 选取为这样的元素: 其在 $F(X)$ 处的投影为 η , 且在 $\gamma \in F(S^m)$ 所对应的 $F(S^m)$ 中选取为 γ . 注意到此时对于任意 $k \geq 1$, 都有满射 (此时带点态射 $f: S^k \rightarrow Z_1$ 都可以对应到某个 $\gamma \in F(S^m)$ 中, 从而 $f^*\xi_1 = \gamma$)

$$T_{\xi_1}: [S^k, Z_1]_* \rightarrow F(S^k)$$

由此可知 ξ_1 至少是 0-万有元且其也为 1-万有元.

接下来对于 $n \geq 1$ 的情况, 我们想造出 Z_n 使得其上具有 n -万有元, 不过由于对于任意 $k \geq 1$ 在 Z_1 上我们具有满射 $[S^k, Z_1]_* \rightarrow F(S^k)$, 因此我们需要做的事情就只剩下将多余的信息注释掉. 现在对于 $n \geq 1$, 假设我们已经定义出了合适的 Z_n , 可定义

$$K_n := \{[f] \in [S^n, Z_n]: f^*\xi_n = 0 \in F(S^n)\}$$

不难发现 K_n 就是我们要注释掉的信息, 而注释它们的方式就是进行同伦意义下的推出 (因为 $D^n \simeq *$, 因此对于 CW 复形 Z_n , 将需要注释掉的 S^n 填充为 D^{n+1} 即可), 定义 Z_{n+1} 为同伦推出

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_{[f] \in K_n} S^n & \longrightarrow & Z_n \\ \downarrow & \text{hPO} & \downarrow f_n \\ * \simeq \bigvee_{[f] \in K_n} D^{n+1} & \longrightarrow & Z_{n+1}. \end{array}$$

那么此时对于全体 $[f] \in K_n$ 都有 $f^*(\xi_n) = 0$, 因此根据 Mayer-Vietoris 公式可知 $F(Z_{n+1}) \rightarrow F(Z_n) \times \bigvee_{[f] \in K_n} F(S^n) \bigvee_{[f] \in K_n} F(D^{n+1})$ 为满射, 因此存在 $\xi_{n+1} \in F(Z_{n+1})$ 使得 $f_n^*\xi_{n+1} = \xi_n \in F(Z_n)$. 以下说明 ξ_{n+1} 是 $(n+1)$ -万有元, 根据假设可知我们只需说明 $[S^n, Z_{n+1}] \rightarrow F(S^n)$ 为双射即可, 而满射是构造时便已经成立的, 我们刚刚又注释掉了不满射的信息, 因此自动成为双射.

第二步. 现在我们有 Z_n 以及 n -万有元 ξ_n , 以下给出 Z_X 的构造, 由 Z_n 到 Z_{n+1} 的构造以及 $(n+1)$ -万有元同时为 n -万有元可知, 应当将 Z_X 定义为同伦余极限

$$Z_X := \operatorname{holim}_n Z_n := \left(\bigvee_{n \geq 1} Z_n \wedge [n, n+1]_+ \right) / \sim$$

此处 $\sim$ 定义为 $(x_n, n+1) \sim (f(x_n), n+1)$. 接下来验证 Z_X 就是我们所要找到的东西, 不难发现该同伦余极限同构于同伦推出

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_{n \geq 0} Z_n & \longrightarrow & \bigvee_{k \geq 0} Z_{2k} \\ \downarrow & \text{hPO} & \downarrow \\ \bigvee_{k \geq 0} Z_{2k+1} & \longrightarrow & Z_X \end{array}$$

$\bigvee_{n \geq 0} Z_n \rightarrow \bigvee_{k \geq 0} Z_{2k}$ 由 $n = 2k$ 时取为 id 而 $n = 2k+1$ 时取为 $f_{2k+1}: Z_{2k+1} \rightarrow Z_{2k+2}$ 给出. 类似地, $\bigvee_{n \geq 0} Z_n \rightarrow \bigvee_{k \geq 0} Z_{2k+1}$ 在 $n = 2k+1$ 时取为 id 在 $n = 2k$ 时取为 $f_{2k}: Z_{2k} \rightarrow Z_{2k+1}$.

因此根据 Mayer-Vietoris 公式可给出 $\xi \in F(Z_X)$ 使其限制到 $F(Z_n)$ 上为 ξ_n . 接下来说明 ξ 是万有元. 只需考虑

$$\begin{array}{ccccccc} [S^k, Z_0] & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & [S^k, Z_k] & \longrightarrow & [S^k, Z_{k+1}] \xrightarrow{\sim} [S^k, Z_{k+2}] \xrightarrow{\sim} \cdots \xrightarrow{\sim} [S^k, Z_X] \\ & \searrow T_{\xi_0} & & & \searrow T_{\xi_k} & & \searrow T_{\xi_{k+1}} \\ & & & & & & \searrow T_{\xi_{k+2}} \\ & & & & & & \searrow T_{\xi} \\ & & & & & & F(S^k) \end{array}$$

不难发现对于 $n > k$ 都有 T_{ξ_n} 为双射.

□

以下证明 Brown 可表性定理.

定理 1.4.5 的证明. F 可表推 F 保楔和公理与 Mayer-Vietoris 公式是显然的. 我们来证明反向的情况.

对于 $X = *$ 且 $\eta := 0 \in F(*)$ 为唯一的元素的情况使用命题 1.4.7 可知存在 $Z := Z_*$ 以及 $\xi := \xi_*$, 使得 ξ 为万有元. 接下来说明对于任意带点空间 X 都有双射

$$T_\xi: [X, Z]_* \rightarrow F(X), \quad (X \xrightarrow{f} Z) \mapsto f^* \xi$$

分为满与单的情况进行说明:

满射. 选取 $\eta \in F(X)$ 而后考虑空间 $\tilde{X} := X \vee Z$ 且 $\tilde{\eta} \in F(\tilde{X}) \simeq F(X) \times F(Z)$ 为对应于 (η, ξ) 的元素. 由命题 1.4.7 可知存在空间 $\tilde{Z}$, 带点态射 $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Z}$ 以及 $\tilde{\xi} \in F(\tilde{Z})$ 使

得 $\tilde{f}^*(\tilde{\xi}) = \tilde{\eta}$. 令 g 表示复合 $Z \hookrightarrow X \vee Z \xrightarrow{f} \tilde{Z}$. 则有 $g^*(\tilde{\xi}) = \xi$, 并且对于全体 $k \geq 0$ 都有

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(Z) = [S^k, Z]_* & \xrightarrow{g_*} & [S_k, \tilde{Z}]_* = \pi_k(\tilde{Z}) \\ & \searrow T_\xi \quad \swarrow T_{\tilde{\xi}} & \\ & F(S^k). & \end{array}$$

由于 ξ 和 $\tilde{\xi}$ 均为万有元, 因此 T_ξ 与 $T_{\tilde{\xi}}$ 均为双射, 从而构成弱同伦等价, 根据定理 1.1.15 可知 $g: Z \rightarrow \tilde{Z}$ 为同伦等价. 从而 $[X, Z]_* \rightarrow [X, \tilde{Z}]_*$ 也为双射. 从而有交换图表

$$\begin{array}{ccc} [X, Z]_* & \xrightarrow{g_*} & [X, \tilde{Z}]_* \\ & \searrow T_\xi \quad \swarrow T_{\tilde{\xi}} & \\ & F(X). & \end{array}$$

因此构成满射 (不过不一定是单射).

单射. 给定使得 $\eta := f^*(\xi) = g^*(\xi)$ 的 $f, g: X \rightarrow Z$, 以下说明 f 带点同伦于 g , 定义 $\tilde{X}$ 为同伦推出:

$$\begin{array}{ccc} X \vee X & \xrightarrow{(f,g)} & Z \\ (\text{id}_X, \text{id}_X) \downarrow & \text{hPO} & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \tilde{X} := X \sqcup_{X \vee X}^h Z. \end{array}$$

根据 Mayer-Vietoris 公式可知存在元素 $\tilde{\eta} \in F(\tilde{X})$ 对应于 (η, ξ) . 根据命题 1.4.7 又可取出 $\tilde{Z}$ 以及 $\tilde{\xi}$ 对应于 $(\tilde{X}, \tilde{\eta})$. 再根据类似于前文的论证可知 $Z \rightarrow \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Z}$ 为同伦等价. 但是这又说明 $\tilde{f}$ 提升到以下交换图表

$$\begin{array}{ccc} X \vee X & \xrightarrow{(f,g)} & Z \\ (\text{id}_X, \text{id}_X) \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ X & & \end{array}$$

由此可知 f 与 g 均同伦于 $\tilde{f}$, 从而 $[f] = [g]$.

□

接下来说明每个广义上同调理论都可以被谱所表出.

命题 1.4.8. . 令 $h^*: hS_*^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}^{\mathbb{Z}}$ 为上同调理论. 则存在谱 E 使得 h^* 同构于由构造 1.3.4 所给出的上同调理论 E^* .

证明. 我们分两步解决这个问题:

第一步. 首先说明对于 $n \geq 0$ 有 $h^0: (h\mathcal{S}_*^{\geq 1})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 满足定理 1.4.5 所述条件. 楔和公理是显然的, 至于 Mayer-Vietoris 性质则考虑同伦推出图表

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{k} & A \\ \downarrow 1 & \text{hPO} & \downarrow i \\ B & \xrightarrow{j} & X, \end{array}$$

根据同伦推出图表的过渡性, 我们知道具有余纤维上的同伦等价 $C(k) \rightarrow C(j)$. 从而结合注记 1.4.4 给出长正合列

$$\begin{array}{ccccccc} h^n(C(j)) & \xrightarrow{q^*} & h^n(X) & \xrightarrow{j^*} & h^n(B) & \xrightarrow{\partial} & h^{n+1}(C(j)) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow i^* & & \downarrow l^* & & \downarrow \simeq \\ h^n(C(k)) & \xrightarrow{p^*} & h^n(A) & \xrightarrow{k^*} & h^n(C) & \xrightarrow{\partial} & h^{n+1}(C(k)). \end{array}$$

考虑使得 $k^*(\alpha) = l^*(\beta) \in h^n(C)$ 的 $\alpha \in h^n(A)$ 以及 $\beta \in h^n(B)$. 接下来需要做的是说明存在 $\gamma \in h^n(X)$ 使得 $\alpha = i^*(\gamma)$ 且 $\beta = j^*(\gamma)$. 而底部态射表明 $\partial k^*(\alpha) = 0$, 从而 $\partial l^*(\beta) = 0$, 而最右侧的同构表明 $\partial \beta = 0$, 又根据正合性表明存在 γ_0 使得 $\beta = j^*(\gamma_0)$. 不过此时 $i^*\gamma_0$ 不一定是 α , 因此考虑

$$k^*(\alpha - i^*\gamma_0) = k^*\alpha - k^*i^*\gamma_0 = 0$$

由此可知 $\alpha - i^*\gamma_0 \in \ker(k^*) \simeq \text{im}(p^*)$, 又根据最左侧的同构, 可以提升到 $h^n(C(f))$ 中. 取 $\gamma_1 \in h^n(C(f))$ 为使得 $i^*q^*\gamma_1 = \alpha$ 的元素, 令 $\gamma := \gamma_0 + q^*\gamma_1$ 即可. 从而 $h^n(X) \twoheadrightarrow h^n(B) \times_{h^n(C)} h^n(A)$.

第二步. 再根据定理 1.4.5, 我们得到连通带点空间 Z_n 使得 $[-, Z_n]$ 表出 h^n , 不难发现有自然同构

$$h^n(X) \simeq h^{n+1}(\Sigma X) \simeq [\Sigma X, Z_{n+1}]_* \simeq [X, \Omega Z_{n+1}]_*$$

取 $E_n := \Omega Z_{n+1}$ 我们就得到了所求的谱 $(E_n)_n$.

□

命题 1.4.9. . 令 E 和 F 为谱, 且 $f^*: E^* \rightarrow F^*$ 为其对应上同调理论间的态射, 则存在谱间态射 $f: E \rightarrow F$ 使其诱导出 f^* .

证明. 对 $n \geq 0$, 具体展开 $f^n: E^n \rightarrow F^n$ 可发现其为 $[-, E_n]_* \rightarrow [-, F_n]_*$ 的形式. 根据 Yoneda 引理, 这给出带点空间之间的带点态射 $f_n: E_n \rightarrow F_n$. 而后说明其确实构成谱间态射, 为此考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} [-, E_n]_* & \xrightarrow{\sim} & [-, \Omega E_{n+1}]_* \\ \downarrow f_n \circ - & & \downarrow \Omega f_{n+1} \circ - \\ [-, F_n]_* & \xrightarrow{\sim} & [-, \Omega F_{n+1}]_*, \end{array}$$

据 Yoneda 引理可给出交换图

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{\sim} & \Omega E_{n+1} \\ \downarrow f_n & & \downarrow \Omega f_{n+1} \\ F_n & \xrightarrow{\sim} & \Omega F_{n+1}, \end{array}$$

即为谱间态射.

□

第2章 稳定范畴

本章的主要目的在于使用稳定范畴的角度去看谱, 在这一视角下, 谱所构成的范畴 $\mathbf{Sp}$ 将被视为生象范畴 $\mathbf{Ani}$ 的稳定化, 并且研究 $\mathbf{Sp}$ 的一些性质.

首先, 在 2.1 节中我们将回顾一些基础的范畴知识.

而后在 2.2 中我们以稳定范畴的结构与构造为主线, 在此过程中不断探索并且探讨可表现范畴与稳定范畴的关联, 给出稳定范畴的几个等价定义:

定理. 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, 则以下条件等价:

1. $\mathcal{C}$ 带有有限极限且 $\Omega: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 为范畴等价;
2. $\mathcal{C}$ 带有有限余极限且 $\Sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 是范畴等价;
3. $\mathcal{C}$ 带有纤维与余纤维, 且纤维列均为余纤维列;
4. $\mathcal{C}$ 带有有限极限与有限余极限, 且 $\mathcal{C}$ 中交换图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ W & \xrightarrow{k} & Z \end{array}$$

为 $\mathcal{C}$ 中的拉回图表当且仅当其为推出图表;

5. $\mathcal{C}$ 带有有限极限与有限余极限, 且有限极限与有限余极限可交换;
6. $\mathbf{Sp}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}$.

满足上述任一等价条件时, 称 $\mathcal{C}$ 是稳定的.

证明. 我们在后文的若干个命题中证明了这一点.

- 1. 与 2. 的等价性参见命题 2.1.43;
- 1. 与 3. 与 4. 的等价性参见定理 2.2.6;

- 1. 与 5. 的等价性参见命题 2.2.14;
- 1. 与 6. 的等价性参见命题 2.2.31.

□

而在 2.2.6 中我们以在稳定范畴中构建稳定同伦 (或同调) 为目的引入 t-结构. 最后介绍 Lurie 张量积与谱的张量积.

2.1 基础知识

本节来补充一些必要的基础知识, 假定读者看过[六函子讨论班](#)的前三节内容.

2.1.1 模型范畴补遗

关于[模型范畴](#)的有关知识可见 [[香蕉空间, 2021](#)].

定义-命题 2.1.1. . 令 $\mathcal{M}$ 为单纯模型范畴, 则 $N^{\text{hc}}(\mathcal{M}^\circ) \simeq \mathcal{M}[W^{-1}]$, 此处 $\mathcal{M}^\circ$ 是 $\mathcal{M}$ 中双纤维性对象所张成的全子范畴, 此时, 我们也称 $\mathcal{C} \simeq N^{\text{hc}}(\mathcal{M}^\circ)$ 为 $\mathcal{M}$ 的**底** $(\infty, 1)$ -**范畴**.

注记 2.1.2. . 在上述命题中, 若 $\mathcal{M}$ 是组合的模型范畴, 则其底 $(\infty, 1)$ -范畴是可表现的.

证明. [[Lurie, 2017, Theorem 1.3.4.20](#)] □

定理 2.1.3. (识别同伦 (余) 极限). 对于组合的单纯模型范畴 A , 其同伦脉 $N^{\text{hc}}(A^\circ)$ 具有全体极限以及余极限. $(\infty, 1)$ -函子 $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathfrak{N}(A^\circ)$ 的余极限和极限分别刻画为

$$\varinjlim(F) \simeq R(\text{holim}_{\text{Path}(\mathcal{I})} \tilde{F}), \quad \varprojlim(F) \simeq Q(\text{holim}_{\text{Path}(\mathcal{I})} \tilde{F})$$

此处 $\tilde{F}: \text{Path}(\mathcal{I}) \rightarrow A^\circ$ 为 F 在[实现-脉伴随](#) $\text{Path} \dashv N^{\text{hc}}$ 的左伴随对象.

证明. [[Lurie, 2009b, Theorem 4.2.4.1](#)] □

因此对于范畴 Top , 其作为组合的单纯模型范畴 $\text{Top}_{\text{Quillen}}$ (即带有 Quillen–Serre 模型结构) 的单纯脉 (注意到双纤维性对象所构成的范畴实际上为 CW, 不过也可以理解为 $\mathcal{S}$), 其极限和余极限即为 $\mathcal{S}$ 中的同伦极限与同伦余极限.

定理 2.1.4. (同伦假设). 有范畴等价

$$\text{Top} \simeq \text{Ani}.$$

因此有些文献也称 Ani 为空间所构成的范畴.

2.1.2 实现-脉伴随

定理 2.1.5. . 令 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 为范畴, 且 $\mathcal{D}$ 余完备. 则沿 Yoneda 嵌入 $y: \mathcal{C} \rightarrow \text{PSh}(\mathcal{C})$ 给出范畴等价

$$y^*: \text{Fun}^L(\text{PSh}(\mathcal{C}), \mathcal{D}) \xrightarrow{\sim} \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}).$$

定理 2.1.6. . 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, $\mathcal{D}$ 为余完备范畴. 考虑图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \\ \downarrow y & \searrow F & \\ \text{PSh}(\mathcal{C}) & & \mathcal{D} \end{array}$$

有伴随函子

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{|\cdot|_F} & \\ \text{PSh}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\quad \perp \quad} & \mathcal{D} \\ & \xleftarrow{N_F} & \end{array}$$

其中 $|\cdot|_F$ 定义为左 Kan 延拓 $\text{Lan}_y F$, 而 N_F 将 $d \in \mathcal{D}$ 映为预层 $N_F(d): c \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), d)$.

证明. [Lurie, 2018a, Tag 04BF] □

2.1.3 Beck–Chevalley 自然变换

定义 2.1.7. . 考虑范畴的图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}' & \xrightarrow{q'_*} & \mathcal{D}' \\ \downarrow p'_* & & \downarrow p_* \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{q_*} & \mathcal{D}. \end{array}$$

且同构 $\eta: p_* q'_* \rightarrow q_* p'_*$ 保证其交换性, 则称该图表为**左可伴随**的是指 q_* 和 q'_* 具有左伴随使得态射

$$\gamma: q^* p_* \xrightarrow{u} q^* p_* q'_* q'^* \xrightarrow{\eta} q^* q_* p'_* q'^* \xrightarrow{c} p'_* q'^*$$

为同构, 此处 u 是 $q'^* \dashv q'_*$ 的单位, c 是 $q^* \dashv q_*$ 的单位. 此时也称 γ 是**推拉变换**, 或称 **左 Beck–Chevalley 自然变换**.

2.1.4 Grothendieck–Lurie 构造

首先, 我们来粗略回忆一下直化与反直化. 这是一种在范畴上的“纤维丛”结构.

定义 2.1.8. . 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, 令 $p: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子.

- 称 $\mathcal{U}$ 中态射 $f: X \rightarrow Y$ 为 **p -推出** 的是指对于任意 $\mathcal{U}$ 中态射 $g: X \rightarrow Z$, 它们所构成的尖角 $\Delta_0^2 \rightarrow \mathcal{U}$ 若复合上 p 后在 $\mathcal{C}$ 中具有填充 $\sigma: \Delta^2 \rightarrow \mathcal{C}$, 则存在 (在可缩意义下唯一的) 填充 $\tau: \Delta^2 \rightarrow \mathcal{U}$ 使得 $p(\tau) = \sigma$. 使用图表示意为

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ f \downarrow & \nearrow \tau & \\ Y & & \end{array} \mapsto \begin{array}{ccc} p(X) & \xrightarrow{p(g)} & p(Z) \\ p(f) \downarrow & \nearrow \sigma & \\ p(Y) & & \end{array}$$

更加形式化地说, 称 $f: X \rightarrow Y$ 是 p -推出态射是指对于任意 $Z \in \mathcal{U}$, 图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(Y, Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(X, Z) \\ p_* \downarrow & \text{PB} & \downarrow p_* \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(p(Y), p(Z)) & \xrightarrow{p(f)^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(p(X), p(Z)) \end{array}$$

为 $\mathbf{Ani}$ 中的拉回图表, 即为同伦拉回图表.

- 令 $p\text{-coCart} \subset \mathbf{Ar}(\mathcal{U})$ 为由 p -推出态射所生成的全子范畴. 则称 p 是**推出纤维化**是指对于以下交换图表

$$\begin{array}{ccc} p\text{-coCart} & \xrightarrow{p} & \mathbf{Ar}(\mathcal{C}) \\ \downarrow q & & \downarrow s \\ P & \xrightarrow{\text{PB}} & \mathcal{C} \\ \downarrow s & & \downarrow p \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{p} & \mathcal{C} \end{array}$$

中虚线所示的典范态射为同构.

换句话说, 称 p 为推出纤维化是指对于任意 $\mathcal{C}$ 中在 p 的本质像内的对象 X , 从其出发的全体态射 $X \rightarrow Y$ 在 p 下的原像均为 p -推出态射.

定理 2.1.9. (直化/反直化, Lurie). 令 $\mathcal{C}$ 为范畴. 令 $\mathrm{coCart}(\mathcal{C}) \subset \mathbf{Cat}_{/\mathcal{C}}$ 为由打到 $\mathcal{C}$ 的推出纤维化为对象且态射为保持推出边的态射所张成的非全子范畴, 则具有范畴等价

$$\begin{array}{ccc} & \text{St} & \\ \mathrm{coCart}(\mathcal{C}) & \simeq & \mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Cat}) \\ & \text{Un} & \end{array}$$

将 St 和 Un 分别称为直化和反直化, 事实上, 对于函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$, 其反直化为取元素范畴 $\int_{\mathcal{C}} F$. 而直化的具体操作我们留在下文进行构造.

证明. [Lurie, 2009b, § 3.2] □

以下给出直化的刻画, 给定推出纤维化 $p: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$, 以下构建其反直化:

- 对象: 对于 $X \in \mathcal{C}$, $\text{Un}(p)(X)$ 定义为纤维

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(X) & \longrightarrow & * \\ \downarrow & \text{PB} & \downarrow X \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{p} & \mathcal{C} \end{array}$$

- 态射: 由定义可知 $p\text{-coCart} \simeq \text{Ar}(\mathcal{C}) \times_{s,\mathcal{C}} \mathcal{U}$, 而后考虑 $\mathcal{C}$ 中态射 $X \rightarrow Y$, 可构建拉回图表

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(X) & \longrightarrow & p\text{-coCart} \\ \downarrow & \text{PB} & \downarrow \\ \{\alpha\} \times_{s,\mathcal{C}} \mathcal{U} & \longrightarrow & \text{Ar}(\mathcal{C}) \times_{s,\mathcal{C}} \mathcal{U} \end{array}$$

而右侧纵向箭头为同构表明拉回后仍为同构, 从而可以得到同伦等价 $\{\alpha\} \times_{\text{Ar}(\mathcal{C})} \text{Ar}(\mathcal{U}) \rightarrow p^{-1}(X)$, 它具有截面 $p^{-1}(X) \rightarrow \{\alpha\} \times_{\text{Ar}(\mathcal{C})} \text{Ar}(\mathcal{U})$. 而后利用态射 $t: \text{Ar}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ 以及 $t: \text{Ar}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{C}$ 可得

$$p^{-1}(X) \rightarrow \{\alpha\} \times_{\text{Ar}(\mathcal{C})} \text{Ar}(\mathcal{U}) \xrightarrow{t} \{y\} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{U} \simeq p^{-1}(Y).$$

定义 2.1.10. . 称 p 为**左纤维化**是指其为满足以下等价条件的推出纤维化:

1. $\text{St}(p): \mathcal{C} \rightarrow \text{Cat}_{\infty}$ 穿过 Ani ;
2. 其导出纤维为生象, 即在 Cat 中取纤维所得到的结果为生象;
3. p 是保守函子, 即 $\mathcal{U}$ 中态射 f 为同构当且仅当 $p(f)$ 为同构;
4. $\mathcal{U}$ 中任意态射均为 p -推出态射.

虽然这套定义与 [Lurie, 2009b] 中定义并不一致, 但是可以验证在相差范畴等价的意义下二者是一致的.

定理 2.1.11. (直化/反直化, 生象版本). 令 $\text{Left}(\mathcal{C}) \subseteq \text{Cat}_{/\mathcal{C}}$ 为左纤维化所构成的全子范畴, 则定理 2.1.9 可转化为

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{St}} & \\ \text{Left}(\mathcal{C}) & \simeq & \text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Ani}) \\ & \xleftarrow{\text{Un}} & \end{array}$$

.

2.1.5 左 Bousfield 局部化

所谓左 Bousfield 局部化是反射局部化在 $(\infty, 1)$ -范畴中的对应, 它可以用以描述若干种结构, 当然其还具有更强的版本, 即拓扑局部化, 不过鉴于我们并不会去考虑层范畴, 因此不引入, 感兴趣的读者可以看 [Lurie, 2009b, § 6.2.1]. 我们通过以下命题对其进行引入.

定义-命题 2.1.12. . 令 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴, 给定伴随 $\mathcal{C} \begin{smallmatrix} \xrightarrow{F} \\ \perp \\ \xleftarrow{G} \end{smallmatrix} \mathcal{D}$ 则:

1. G 为全忠实函子当且仅当余单位 $c: FG \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ 为同构;
2. $\mathcal{C}$ 中态射 $X \xrightarrow{f} Y$ 在 F 下的像为同构当且仅当其为左 G -局部同构, 即对于任意 $D \in \mathcal{D}$, f 均诱导态射生象上的同构

$$f^*: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, GD) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GD).$$

常常舍弃“左”而以 G -局部同构来指代左 G -局部同构.

此外, 若 1. 的等价条件成立, 则:

3. 单位 $u: C \rightarrow GFC$ 总是 G -局部同构;
4. $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为关于 G -局部同构的局部化.

此时称 F 为 $\mathcal{C}$ 关于 G -局部同构的**左 Bousfield 局部化**. 特别地, 此时 $\mathcal{C}[W_G^{-1}]$ 是局部小范畴, W_G 为 G -局部同构所构成的集合. 对偶地, 有具有**右 Bousfield 局部化**.

证明. [Hebestreit, 2021, I.58] □

接下来我们探究范畴局部化为 Bousfield 局部化的条件.

命题 2.1.13. . 令 $W \subseteq \pi_0 \text{core}(\text{Ar}(\mathcal{C}))$ 为一族态射, 且记 $\mathcal{C}$ 关于 W 的局部化为 $p: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[W^{-1}]$. 则 $\mathcal{C}[W^{-1}]$ 中态射 $\tau: pX \rightarrow Y$ 将 X 表为 Y 在 p 下的右伴随对象当且仅当 τ 是同构, 且 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ani}$ 将 W 中的全体态射映为同构.

特别地, p 的右伴随 G 是自动全忠实的且其本质像为左 G -局部对象所张成的全子范畴, 即使得 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ani}$ 将左 G -局部同构映为同构的 $C \in \mathcal{C}$.

证明. [Hebestreit, 2021, I.59]. □

推论 2.1.14. . 令 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为左 Bousfield 局部化, 且 $\mathcal{C}$ 为完备或余完备的, 则 $\mathcal{D}$ 也是完备或余完备的. 更进一步, 可以将图表 $K: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ 的余极限若存在则可被刻画为

$$\varinjlim_{\mathcal{I}} K \simeq F(\varinjlim_{\mathcal{I}} GK)$$

注记 2.1.15. . $\varinjlim$ 若存在则可直接被刻画, 因为 G 为右伴随与极限交换.

证明. [Hebestreit, 2021, I.61] □

命题 2.1.16. . 令 $\mathcal{C}$ 为范畴且 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 为使得本质像 $FC \subseteq \mathcal{C}$ 的函子. 则以下条件等价:

1. 存在函子 $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 及其全忠实右伴随 $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 使得 $g \circ f \simeq L$;

2. 将 F 视为 $\mathcal{C} \rightarrow FC$ 这一函子时, F 是含入函子 $FC \hookrightarrow \mathcal{C}$ 的左伴随;
3. 存在从 $\text{id}_{\mathcal{C}}$ 到 F 的自然变换 $\alpha: \mathcal{C} \times [1] \Rightarrow \mathcal{C}$ 使得对于任意 $C \in \mathcal{C}$ 都有 $F(\alpha(C)), \alpha(F(C)): FC \rightarrow FFC$ 为等价.

证明. [Lurie, 2009b, Proposition 5.2.7.4]. □

2.1.6 可表现范畴

构造 2.1.17. . 令 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为范畴, 则其**统联** $\mathcal{C} \star \mathcal{D}$ 定义为 Cat 中的推出

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C} \times \{0\} \times \mathcal{D}) \sqcup (\mathcal{C} \times \{1\} \times \mathcal{D}) & \longrightarrow & \mathcal{C} \times [1] \times \mathcal{D} \\ \downarrow & \text{PO} & \downarrow \\ (\mathcal{C} \times \{0\}) \times (\{1\} \times \mathcal{D}) & \longrightarrow & \mathcal{C} \star \mathcal{D} \end{array}$$

不难发现上述推出的直观就是给出一个在 $\{0\}$ 处为 $\mathcal{C}$ 而在 $\{1\}$ 处为 $\mathcal{D}$ 的东西.

记 $\mathcal{C}^{\triangleleft} := [0] \star \mathcal{C}$ 为 $\mathcal{C}$ 的左锥, 这相当于在 $\mathcal{C}$ 中自由地插入了一个始对象, 类似地, 记 $\mathcal{C}^{\triangleleft} := \mathcal{C} \star [0]$ 为 $\mathcal{C}$ 的右锥, 这相当于在 $\mathcal{C}$ 中自由地插入了一个终对象.

定义 2.1.18. . 令 $\mathcal{I}, \mathcal{C}$ 为范畴,

1. 称 $\mathcal{I}$ 是 κ -**滤过**的是指每个函子 $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ 都可以延拓为 $\mathcal{J}^{\triangleleft} \rightarrow \mathcal{I}$. 当 $\kappa = \aleph_0$ 时, 简称其为**滤过**的;
2. 称 $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ 的余极限为 κ -**滤过**的是指 $\mathcal{I}$ 为 κ -滤过范畴.

注记 2.1.19. . 结合前文对于右锥的说明, 称范畴 $\mathcal{J}$ 是 κ -滤过的无非是说其内任意 κ -图表都具有一个共同的下界.

定义 2.1.20. (有限范畴). 记 $\text{Cat}^{\text{fin}} \subseteq \text{Cat}$ 为包含 $\emptyset, *$ 和 $[1]$ 且关于推出封闭的最小范畴. 则称小范畴 $\mathcal{I}$ 是**有限**的, 是指 $\mathcal{I} \in \text{Cat}^{\text{fin}}$.

定义 2.1.21. . 令 κ 为正则基数, 且 $\mathcal{C}$ 为范畴, 称 $\mathcal{C}$ 是 κ -**本质小**的是指

对象本质小 $\pi_0 \text{core}(\mathcal{C})$ 是 κ -小集合;

态射本质小 对于任意 $X, Y \in \mathcal{C}$ 都有 $\pi_0 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 是 κ -小集合且固定 $\alpha: X \rightarrow Y$ 有 $\pi_n(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \alpha)$.

称 $\mathcal{C}$ 是**本质小**的是指存在 κ 使得 $\mathcal{C}$ 是 κ -本质小的.

构造 2.1.22. . 令 κ 为正则基数, 且 $\mathcal{C}$ 为本质小范畴. 令 $\text{Ind}_{\kappa}(\mathcal{C}) \subseteq \text{PSh}(\mathcal{C})$ 为由使得反直化 $\int^{\mathcal{C}} E$ 为 κ -滤过图表的预层 $E: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ani}$. 当 $\kappa = \aleph_0$ 时, $\text{Ind}(\mathcal{C}) := \text{Ind}_{\aleph_0}(\mathcal{C})$.

注意到 Yoneda 嵌入 $y: \mathcal{C} \rightarrow \text{PSh}(\mathcal{C})$ 会穿过 $\text{Ind}_{\kappa}(\mathcal{C})$.

定义 2.1.23. . 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, 且 κ 为正则基数.

1. 称 $\mathcal{C}$ 中对象 X 为 κ -紧的是指 $\mathrm{Hom}(X, -)$ 保持 κ -滤过余极限. 记 $\mathcal{C}^\kappa \subseteq \mathcal{C}$ 为由 κ -紧对象所构成的全子范畴;
2. 称 $\mathcal{C}$ 为 κ -可达的是指存在 κ 以及小范畴 $\mathcal{C}_0$ 使得 $\mathcal{C} = \mathrm{Ind}_\kappa(\mathcal{C}_0)$, 称 $\mathcal{C}$ 是可达的是指存在 κ 使得 $\mathcal{C}$ 是 κ -可达的;
3. 称 $\mathcal{C}$ 是 κ -紧生成的是指其 κ -可达且具有任意小余极限, 称 $\mathcal{C}$ 是可表现的是指存在 κ 使其为 κ -紧生成范畴.

全体可表现范畴以及其间作为左伴随的函子所构成的范畴记为 Pr^L , 同理, 全体可表现范畴以及其间作为右伴随函子所构成的范畴记为 Pr^R .

警告 2.1.24. . 此处会有一些名词问题, 有些资料 (比如 [Lurie, 2018a, Tag 0673]) 会将 κ -可达范畴称为 κ -紧生成范畴, 本文所沿用的是 [Lurie, 2009b, Definition 5.5.7.1] 所用名词.

定理 2.1.25. (伴随函子定理). 令 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为 $(\infty, 1)$ -范畴间的函子且 $\mathcal{C}$ 是可表现的. 则:

1. F 是左伴随当且仅当它保全体小余极限 (假设 $\mathcal{D}$ 中相应余极限均存在);
2. 若 $\mathcal{D}$ 是可表现的, 则 F 为右伴随当且仅当它保持 κ -滤过余极限且保持小极限.

证明. [Lurie, 2009b, Corollary 5.5.2.9]. □

命题 2.1.26. . 令 $\mathcal{C}$ 为具有所有小余极限的范畴且 $\mathcal{C}^\kappa$ 是小范畴, 则以下条件等价:

1. $\mathcal{C}$ 是 κ -紧生成的;
2. $\mathcal{C}$ 中每个对象均可写为 κ -紧对象的小余极限;
3. 若 $X \rightarrow Y$ 为使得

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$$

对于所有的 $Z \in \mathcal{C}$ 均为同构的态射, 则 $X \rightarrow Y$ 是同构.

命题 2.1.27. . 令 $\mathcal{C}$ 为 κ -紧生成范畴, 则由 $\mathcal{C}^\kappa \rightarrow \mathcal{C}$ 所诱导的 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C}^\kappa) \rightarrow \mathcal{C}$ 是左 Bousfield 局部化.

推论 2.1.28. . 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, 则其可表现当且仅当存在 $\mathcal{C}_0$ 使得 $\mathcal{C}$ 为 $\mathrm{PSh}(\mathcal{C}_0)$ 的左 Bousfield 局部化.

命题 2.1.29. . Pr^L 和 Pr^R 具有全体小极限, 且 $\mathrm{Pr}^L \rightarrow \widehat{\mathrm{Cat}}$ 和 $\mathrm{Pr}^R \rightarrow \widehat{\mathrm{Cat}}$ 保持这些小极限.

证明. [Lurie, 2009b, Proposition 5.5.3.13] 以及 [Lurie, 2009b, Proposition 5.5.3.18]. □

推论 2.1.30. . Pr^L 上的余极限与其在 $\widehat{\mathrm{Cat}}$ 中的余极限并不一致. 相反, 它可以通过反变的范畴等价 $\mathrm{Pr}^L \simeq (\mathrm{Pr}^R)^{\mathrm{op}}$ 上的对偶图表, 并且过渡到极限给出.

2.1.7 对称么半范畴, 交换代数, 模

首先给出对称么半范畴的定义以及直观.

定义 2.1.31. (范畴 $\mathbf{Fin}_*$). 考虑带基点有限集范畴 $\mathbf{Fin}_*$, 即其对象为选定了元素 (称为基点) 的有限集, 映射为保持基点的映射.

对自然数 n , 以 $\langle n \rangle$ 记集合 $\{0, \dots, n\}$, 基点为 0; 对于去掉基点的情况, 记为 $\langle n \rangle^\circ$. 以 α_n 记映射 $\langle n \rangle \rightarrow \langle 1 \rangle$, 把 0 映到 0, 其它元素映到 1; 对正整数 $i \leq n$, 以 $\iota_{n,i}$ 记映射 $\langle n \rangle \rightarrow \langle 1 \rangle$, 把 i 映到 1, 把其它元素映到 0.

现在考虑函子

$$\mathbf{Fin}_* \rightarrow \mathbf{Cat}_\infty$$

它将 $\langle n \rangle$ 映为范畴 $\mathcal{C}_{\langle n \rangle}^\otimes$. 我们想将其视为 $\mathcal{C}^n$ (准确来说是 $\mathcal{C}_{\langle 1 \rangle}^n$), 即 n 个 $\mathcal{C}_{\langle 1 \rangle}^\otimes$ 中对象的排列组合, 并且使得 $(X_1, X_2) = (X_2, X_1)$. 那么我们该如何定义出这样的东西呢? 不难发现 $\iota_{n,i}: \langle n \rangle \rightarrow \langle 1 \rangle$ 相当于说将 $(X_1, \dots, X_n)$ 映为第 i 位的 X_i , 因此我们只需要让

$$\iota_{n,1} \times \dots \times \iota_{n,n}: \mathcal{C}_{\langle n \rangle}^\otimes \rightarrow (\mathcal{C}_{\langle 1 \rangle}^\otimes)^n$$

为范畴等价即可. 那么此时对称性和结合律该作何解? 让我们细细道来, 首先还是需要定义出 $\otimes$ 这一概念. 接下来记 $\mathcal{C}_{\langle 1 \rangle}^\otimes$ 为 $\mathcal{C}$, 观察到我们将 $\iota_{n,i}$ 视为打到第 i 个分量的态射, 那么 α_n 就应该是求和的态射, 因此对于 $n = 2$ 的时候, $\iota_{2,1}, \iota_{2,2}$ 以及 α_2 可以给出函子

$$- \otimes -: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \simeq \mathcal{C}_{\langle 1 \rangle}^\otimes \times \mathcal{C}_{\langle 1 \rangle}^\otimes \xleftarrow{\iota_{2,1} \times \iota_{2,2}} \mathcal{C}_{\langle 2 \rangle}^\otimes \xrightarrow{\alpha_2} \mathcal{C}_{\langle 1 \rangle}^\otimes \simeq \mathcal{C}$$

这给出 $(A, B) \mapsto A \otimes B$. 同理, 对于 n 元的情况也可以类似结果. 接下来我们给出其对称性的说明, 至于结合律留给读者自行思考.

对于 $n = 2$ 时, 考虑 $\sigma: \langle 2 \rangle \rightarrow \langle 2 \rangle$ 使得 $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 1$, 则 $\alpha \circ \sigma = \alpha$ 且 $\iota_{2,i} \circ \sigma = \iota_{2,\sigma(i)}$. 这给出

$$(A, B) \mapsto A \otimes B \quad \text{以及} \quad (A, B) \mapsto B \otimes A$$

n 元的情况是类似的. 因此我们可以说明所得到的结构就是一个对称么半范畴, 而由定理 2.1.9 可知这对应一个推出纤维化, 因此得到定义:

定义 2.1.32. . 对称么半范畴指推出纤维化 $\mathcal{C}^\otimes \rightarrow \mathbf{Fin}_*$, 满足:

- 对任意自然数 n , 沿 $\iota_{n,1}, \dots, \iota_{n,n}$ 做推出, 在纤维上得到的函子 $\mathcal{C}_{\langle n \rangle}^\otimes \rightarrow (\mathcal{C}_{\langle 1 \rangle}^\otimes)^n$ 是范畴等价.

称 $\langle 1 \rangle \in \mathbf{Fin}_*$ 上的纤维 $\mathcal{C}_{\langle 1 \rangle}^\otimes$ 为对称么半范畴 $\mathcal{C}^\otimes \rightarrow \mathbf{Fin}_*$ 的**底范畴**, 记作 $\mathcal{C}$. 没有歧义时, 常以 $\mathcal{C}^\otimes$ 甚至 $\mathcal{C}$ 代表对称么半范畴 $\mathcal{C}^\otimes \rightarrow \mathbf{Fin}_*$.

对 $n \in \mathbb{N}$ 以及 $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{C}$, 可将 $(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{C}^n \cong \mathcal{C}_{\langle n \rangle}^\otimes$ 沿 α_n 做推出, 所得对象记作

$$X_1 \otimes \dots \otimes X_n \in \mathcal{C},$$

称作 $X_1, \dots, X_n$ 的**张量积**. 当 $n = 0$ 时, 此对象记作

$$1_C \in \mathcal{C},$$

称作对称么半范畴 $\mathcal{C}$ 的**么元**; 无歧义时也可只写 1 .

事实上, 我们会将 $\iota_{n,i}$ 称为**惰性态射**, 它诱导了纤维上的遗忘函子. 而 α_n 称为**活性态射**, 它只是在进行张量积. 在下例中给出 $\mathbf{Fin}_*$ 上的惰性态射与活性态射.

例 2.1.33. . $\mathbf{Fin}_*$ 带有典范的对称么半结构, 其配上对称么半结构后记为 $\mathbf{Comm}^\otimes$. 称 $\mathbf{Comm}^\otimes$ 中的态射 $\varphi: \langle n \rangle \rightarrow \langle m \rangle$ 为

- **惰性态射**, 是指其为“缩减定义域”的态射, 即 $\varphi|_{\langle n \rangle \setminus \varphi^{-1}(0)}$ 为同构;
- **活性态射**, 是指 $\varphi^{-1}(0) = \{0\}$.

定义 2.1.34. . 称对称么半范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f: x \rightarrow y$ 是

- **惰性的**, 是指 $p(f)$ 是 $\mathbf{Comm}^\otimes$ 中的惰性态射;
- **活性的**, 是指 $p(f)$ 是 $\mathbf{Comm}^\otimes$ 中的活性态射;

通过惰性态射, 可定义出松对称么半函子:

定义 2.1.35. . 令 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为对称么半范畴, 则称函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为**松对称么半函子**是指其保持惰性态射. 若其保持所有的推出边, 则称其为**严格对称么半函子**.

定义 2.1.36. . 令 $\mathcal{C}$ 为对称么半范畴, 则 $\mathcal{C}$ 中的**交换代数**是指松对称么半函子 $A: \mathbf{Comm}^\otimes \rightarrow \mathcal{C}$. 将 $\mathcal{C}$ 中全体交换代数所构成的范畴记为 $\mathbf{CAlg}(\mathcal{C})$.

注记 2.1.37. . 不难发现, 对称么半范畴就是 $\mathbf{Cat}$ 中的交换代数.

定义 2.1.38. . 令 $\mathcal{C}$ 为对称么半范畴, 则 $\mathcal{C}$ 中的**模**是指松对称么半函子

$$(\mathbf{Fin}_*)_{\langle 1 \rangle /} \rightarrow \mathcal{C}.$$

此处将 $(\mathbf{Fin}_*)_{\langle 1 \rangle /}$ 通过切片范畴对应的左纤维化 $(\mathbf{Fin}_*)_{\langle 1 \rangle /} \rightarrow \mathbf{Comm}^\otimes$ 视同对称么半范畴. 将 $\mathcal{C}$ 上全体模所构成的范畴记为 $\mathbf{Mod}(\mathcal{C})$.

注记 2.1.39. . 首先留意到 $(\mathbf{Fin}_*)_{\langle 1 \rangle /}$ 是这样的对称么半范畴:

- 对象为 $(\langle n \rangle, i)$, $i \in \langle n \rangle$ 为 $1 \in \langle 1 \rangle$ 所对应的像;
- 态射 $(\langle n \rangle, i) \rightarrow (\langle m \rangle, j)$ 为将 i 映为 j 的态射.

此时 $\text{Comm}^\otimes$ 通过 $\langle n \rangle \mapsto (\langle n \rangle, 0)$ 的方式嵌入到 $(\text{Fin}_*)_{\langle 1 \rangle /}$ 中 (不难发现这保持惰性态射), 将该函子记为 a , 则松对称么半函子可复合上该函子得到松对称么半函子

$$A: \text{Comm}^\otimes \xrightarrow{a} (\text{Fin}_*)_{\langle 1 \rangle /} \rightarrow \mathcal{C}$$

这是 $\mathcal{C}$ 上的交换代数对象, 称为**底交换代数**.

接下来解释模的具体意思, 考虑松对称么半函子

$$F: (\text{Fin}_*)_{\langle 1 \rangle /} \rightarrow \mathcal{C},$$

将 $F(\langle 1 \rangle, 0)$ 记为 $\mathfrak{a}$, 将 $F(\langle 1 \rangle, 1)$ 记为 $\mathfrak{m}$, 分别称为**底交换代数**与**底模**. 则在 $i \neq 0$ 时 $M(\langle n \rangle, i)$ 就相当于在 $\mathcal{C}$ 中给出这样的信息¹:

$$\mathfrak{a} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{m} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{a},$$

其中第 i 位是 $\mathfrak{m}$.

- 考虑惰性态射 $(\langle n \rangle, i) \rightarrow (\langle m \rangle, j)$ 且 $j \neq 0$, 这相当于给出运算 $\mathfrak{a} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\mathfrak{m}}_{i\text{-th}} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\mathfrak{m}}_{j\text{-th}} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{a}$;
- 考虑惰性态射 $(\langle n \rangle, i) \rightarrow (\langle m \rangle, j)$ 且 $j = 0$, 这相当于给出运算 $\mathfrak{a} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\mathfrak{m}}_{i\text{-th}} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{a}$.

至于 $i = 0$ 的情况, 所得到的信息只是 $\mathfrak{a} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{a}$. 这样我们就在高阶范畴论中合理的编码出了一个模对象.

考虑拉回

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}_A & \longrightarrow & \text{Mod}(\mathcal{C}) \\ \downarrow & \text{PB} & \downarrow a^* \\ * & \xrightarrow{A} & \text{CAlg}(\mathcal{C}). \end{array}$$

这相当于给出交换代数 A 上的模范畴.

在上述理论中, 引入**代数模式**和 **∞ -算畴**是讲明白更多东西的好办法, ∞ -算畴可以参考 [Lurie, 2017], 或者来看 [Cnossen, 2025a] 中整的新活.

注记 2.1.40. . 在我们需要结合律时, 应当使用 Δ^{op} 来编码这一切, 此时模对象需要论及左右, 左右模均可视为 $\Delta^{\text{op}} \times [1]$ 的对称么半函子 (具体可见 [Lurie, 2017, Proposition 4.2.2.12], 需选取不同的点表示左乘与右乘), 而双模可视为 $\Delta_{/[1]}^{\text{op}}$ 的对称么半函子 (不过在 [Lurie, 2017] 中将其视为 $\Delta^{\text{op}} \times [1] \times [1]$). 在交换代数上, 左右模是一致的 (参见 [Lurie, 2017, Proposition 4.5.1.4])

¹当然, 实际上应该是 $(\mathfrak{a}, \cdots, \mathfrak{m}, \cdots, \mathfrak{a})$ 的形式, 此处是为了方便表示运算.

2.1.8 纬悬与环路

接下来介绍范畴中的纬悬与环路函子.

定义 2.1.41. . 称范畴 $\mathcal{C}$ 是**带点**的是指它有零对象.

对于带有零对象的范畴 $\mathcal{C}$, 称其**带点化**是考虑范畴 $\mathcal{C}_*/$, 简记作 $\mathcal{C}_*$.

定义 2.1.42. . • 令 $\mathcal{C}$ 为带有有限余极限的范畴, 则 $\mathcal{C}$ 上的**纬悬函子**定义为 $\Sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, X \mapsto 0 \sqcup_X 0$;

• 令 $\mathcal{C}$ 为带有有限极限的范畴, 则 $\mathcal{C}$ 上的**环路函子**定义为 $\Omega: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, X \mapsto 0 \times_X 0$.

命题 2.1.43. . 若 $\mathcal{C}$ 为带有有限极限和余极限的带点范畴, 则具有伴随对

$$\Sigma \dashv \Omega.$$

证明. 考虑 $X, Y \in \mathcal{C}_*$, 则

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_*}(\Sigma X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_*}(0 \sqcup_X 0, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_*}(0, Y) \times_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_*}(X, Y)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_*}(0, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_*}(X, \Omega Y).$$

这显然具有函子性从而构成伴随. $\square$

当取 $\mathcal{C} = \mathbf{Ani}_* \simeq \mathbf{Top}_*$ 时, 所得到的纬悬函子与环路函子即为上一章中所定义的纬悬与环路函子.

2.2 稳定范畴

在本节中, 我们想考虑谱所构成的范畴 $\mathbf{Sp}$ 的性质. 注意到对于任意一个谱 S , 都有 $\Omega S \simeq S$. 但是在带点生象范畴 $\mathbf{Ani}_*$ 中, 定义 2.1.42 所给出的 Ω 却并非范畴等价. 因此为研究谱的结构, 我们首先研究那些使得 Ω 为范畴等价的范畴, 称为稳定范畴.

2.2.1 定义

定义 2.2.1. . 称带点范畴 $\mathcal{C}$ 是**稳定的**, 是指其带有有限极限且 $\Omega: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 为范畴等价.

不难发现, 若 $\Omega: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 为范畴等价, 则 $\Sigma: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 也为范畴等价. 因此

命题 2.2.2. . 以下条件等价:

1. $\mathcal{C}$ 为稳定范畴;
2. $\mathcal{C}$ 有有限余极限, 且 $\Sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 为范畴等价;

接下来我们从链的角度来看待稳定范畴, 回忆到在定义 1.1.4 中我们定义了同伦纤维与同伦余纤维, 而根据定理 2.1.3 可将定义中的同伦拉回和同伦推出变为 Ani (当然要将空间先转化为生象) 这一范畴中的拉回和推出, 因此这一定义也可以延拓到 $\mathcal{C}$ 上.

构造 2.2.3. . 称带点范畴 $\mathcal{C}$ 中态射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 为**复形**是指有 $\mathcal{C}$ 中的交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & Z. \end{array}$$

即 gf 同伦于 0. 在 [Lurie, 2017] 中称其为**三角**, 在 [Cnossen, 2025b] 中称其为 **null-sequence**.

定义 2.2.4. . 令 $\mathcal{C}$ 为带点范畴,

- 称 $\mathcal{C}$ 中的复形 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 为**纤维列**是指其对应的交换图同时为拉回图表, 此时称 X 是 g 的**纤维**, 有时也记为 $X = \text{fib}(g)$;
- 称 $\mathcal{C}$ 中的复形 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 为**余纤维列**是指其对应的交换图同时为推出图表, 此时称 Z 是 f 的**余纤维**, 有时也记为 $Z = \text{cofib}(f)$;
- 称 $\mathcal{C}$ 中的复形 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 为**正合列**是指其既是纤维列又是余纤维列.

注记 2.2.5. . 给定 $\mathcal{C}$ 中的正合列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 无非是在说此时有 $\ker g \simeq \text{im } f$, 这是因为当该复形所对应的交换图为拉回时, X 即为 $g^{-1}(0)$ (因为 $0 \rightarrow Z$ 为单), 而后为推出就相当于说将 f 在 Y 上的像恰好粘为 0.

因此可以得到以下定理:

定理 2.2.6. . 令 $\mathcal{C}$ 为带点范畴, 则以下条件等价:

1. $\mathcal{C}$ 为稳定范畴;
2. $\mathcal{C}$ 有有限极限与有限余极限, 且 $\mathcal{C}$ 中交换图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ W & \xrightarrow{k} & Z \end{array}$$

为 $\mathcal{C}$ 中的拉回图表当且仅当其为推出图表;

3. $\mathcal{C}$ 具有纤维与余纤维, 且复形 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 为纤维列当且仅当其为余纤维列.

证明.

1. $\Rightarrow$ 2. 首先说明当 $\mathcal{C}$ 稳定时, $\mathcal{C}$ 中形如 $Z \leftarrow X \rightarrow Y$ 的图表总是能够张成拉回图表, 并且这件事情具有函子性. 从而考虑 $P \subseteq \text{Fun}([1] \times [1], \mathcal{C})$ 表示全体拉回图表所构成的全子范畴, 我们需要说明具有范畴等价

$$P \xrightarrow{\sim} \text{Fun} \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \\ \bullet & & \end{array}, \mathcal{C} \right).$$

为此考虑 $\mathcal{C}$ 中图表

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega X & \longrightarrow & \Omega Z & \longrightarrow & 0 & & \\ \downarrow & \text{PB} & \downarrow & \text{PB} & \downarrow & & \\ \Omega Y & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \text{PB} & \downarrow & \text{PB} & \downarrow & \text{PB} & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y \\ & & \downarrow & \text{PB} & \downarrow & & \vdots \\ & & 0 & \longrightarrow & Z & \dashrightarrow & \Omega^{-1}A. \end{array}$$

首先不看带虚线箭头的部分, 根据拉回的过渡性, 不难验证这一堆拉回是合法的. 且如果 $Z \leftarrow X \rightarrow Y$ 若能张成拉回图表, 则其应当为 $Y \rightarrow \Omega^{-1}A \leftarrow Z$ 的拉回图表. 因此根据 Ω 为范畴等价可知 Ω^{-1} 也为范畴等价, 从而由于范畴等价伴随等价, Ω^{-1} 保持拉回, 从而

$$\Omega^{-1} \left(\begin{array}{ccc} \Omega X & \longrightarrow & \Omega Y \\ \downarrow & \text{PB} & \downarrow \\ \Omega Z & \longrightarrow & A \end{array} \right)$$

为拉回图表, 而这一操作具有函子性, 因此确实具有范畴等价.

从而考虑由 $Z \leftarrow X \rightarrow Y$ 所张成的拉回图表

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \text{PB} & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & W. \end{array}$$

考虑图表 $A \xleftarrow{\text{id}_A} A \xrightarrow{\text{id}_A} A$, 可知

$$\text{Hom} \left(\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \\ Z & & \end{array}, \begin{array}{ccc} A & \xlongequal{\quad} & A \\ \parallel & & \\ A & & \end{array} \right) \simeq \text{Hom} \left(\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \text{PB} & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & W \end{array}, \begin{array}{ccc} A & \xlongequal{\quad} & A \\ \parallel & \text{PB} & \parallel \\ A & \xlongequal{\quad} & A. \end{array} \right) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, A).$$

而根据极限的定义可知, $W = Z \sqcup_X Y$, 因此 $\mathcal{C}$ 中拉回自动为推出;

2. $\Rightarrow$ 3. 只需令 $W = 0$ 即可;

3. $\Rightarrow$ 1. 只需令 $Y = 0$, 此时 $Z = \Omega X$, 从而 $\Sigma \Omega X \simeq X$.

□

2.2.2 稳定范畴与 Abel 范畴

以下比较稳定范畴与 Abel 范畴.

定义 2.2.7. . 令 $\mathcal{C}$ 为带点范畴, 且具有有限积与余积, 则

1. 称 $\mathcal{C}$ 是**半加性**的, 是指对于任意 $X, Y \in \mathcal{C}$, 都有自然同构 $X \sqcup Y \xrightarrow[\sim]{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} X \times Y$ 此时记 $X \sqcup Y \simeq X \oplus Y \simeq X \times Y$;
2. 称 $\mathcal{C}$ 为**加性**的, 是指其半加性且对于任意 $X \in \mathcal{C}$ 都有自然同构

$$X \oplus X \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} X \oplus X.$$

命题 2.2.8. . 稳定范畴均为加性范畴.

证明. 首先稳定范畴 $\mathcal{C}$ 具有有限极限与有限余极限, 且拉回同时为推出表明 $X \times Y \simeq X \sqcup Y$, 即为双积, 因此半加性. 而后考虑推出

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \text{PO} & \downarrow (\text{id}_X, \text{id}_X) \\ X & \xrightarrow{(0, \text{id}_X)} & X \times X \end{array}$$

由 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴知这是拉回图表, 从而有自然同构

$$X \oplus X \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} X \oplus X.$$

□

注记 2.2.9. (稳定范畴与 Abel 范畴). 可将定理 2.2.6 中的 3. 与 Abel 范畴的定义进行比较, 回忆到 (AB2) 说的是每个单态射都是某个态射的核, 每个满态射都是某个态射的余核. 不难看出这等价于说复形

$$A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{p} C$$

中若 i 为单态射且 p 为满态射, 则该序列为纤维列当且仅当其为余纤维列.

稳定范畴中, 定理 2.2.6 表明我们将单态射和满态射的条件放宽到了一般的态射上, 即复形 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 为纤维列当且仅当其为余纤维列. 因此稳定范畴可以视为 Abel 范畴在高阶范畴中的推广.

但是值得注意的是, 除平凡范畴外, **任何的 Abel 范畴都不会是稳定范畴**, 稳定范畴是高级范畴才有的说法.

由于稳定范畴是 Abel 范畴的推广, 因此在其上讨论正合函子也是比较方便的. 在此我们先证明一个范畴论上常用的引理.

事实 2.2.10. . 若在 Cat 中有 $\mathcal{I} \simeq \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{I}_j$, 且令 $T: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ 为使得对于任意 $j \in \mathcal{J}$, $\mathcal{I}_j \rightarrow \mathcal{I} \xrightarrow{T} \mathcal{C}$ 都具有余极限的函子, 则这些余极限构成函子 $\bar{T}: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$, 使得 $\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} T(i) \simeq \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} \bar{T}(j)$. 事实上由此可以推出余极限互相交换.

引理 2.2.11. . 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, 则 $\mathcal{C}$ 具有余完备当且仅当其具有推出以及任意余积. 函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 保余极限当且仅当其保持推出以及任意余极限. 对偶地得到极限的情况.

证明. (注意: 该证明需要使用一些 Joyal 模型结构) 首先将 $\mathcal{C}$ 视为单纯集, 不难发现 $\mathcal{C} = \varinjlim_{n \geq 0} \text{sk}_n \mathcal{C}$, 因此根据 [Lurie, 2018a, Tag 001B] 可将其写为推出

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_n^{\text{nd}}} \partial \Delta^n & \longrightarrow & \text{sk}_{n-1}(\mathcal{C}) \\ \downarrow & \text{PO} & \downarrow \\ \coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_n^{\text{nd}}} \Delta^n & \longrightarrow & \text{sk}_n(\mathcal{C}) \end{array}$$

此处 $\mathcal{C}_n^{\text{nd}}$ 是 $\mathcal{C}$ 中全体非退化 n -单形所构成的集合.

而后将 $\coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_n^{\text{nd}}} \partial \Delta^n \rightarrow \coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_n^{\text{nd}}} \Delta^n$ 根据 Joyal 模型结构分解为 $\partial \coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_n^{\text{nd}}} \Delta^n \rightarrow \coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_n^{\text{nd}}} \mathcal{B}^n \rightarrow \coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_n^{\text{nd}}} \Delta^n$, 即给出该态射在 Cat 中的对应. 记 $\mathcal{C}_n$ 为推出

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_n^{\text{nd}}} \mathcal{B}^n & \longrightarrow & \mathcal{C}_{n-1} \\ \downarrow & \text{PO} & \downarrow \\ \coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_n^{\text{nd}}} \Delta^n & \longrightarrow & \mathcal{C}_n \end{array}$$

从而 $\mathcal{C} \simeq \varinjlim_{n \geq 0} \mathcal{C}_n$. 令 $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为使得 $\mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{T} \mathcal{D}$ 的函子. 则根据归纳假设以及事实 2.2.10 可知 $\varinjlim_{c \in \mathcal{C}_n} T(c)$ 在 $\mathcal{C}$ 中均存在. 从而一切约化为说明 $\varinjlim_{n \geq 0} \varinjlim_{c \in \mathcal{C}_n}$ 的存在性, 而根据前文构造可知这可以转化为 $\varinjlim_{n \geq 0} \varinjlim_{c \in \mathcal{C}_n} T(c)$ 的推出. $\square$

注记 2.2.12. . 我们可以对其进行推广, 给定正则基数 κ , 上述引理的内容都可以变为 κ -小的情况 (只需将 Cat 改为 $\text{Cat}^{<\kappa}$ 即可). 因此取 κ 为 $\aleph_0$ 时可知

有限极限 = 拉回 + 终对象, 有限余极限 = 推出 + 始对象.

推论 2.2.13. . 稳定范畴均带有有限极限以及余极限, 且稳定范畴间的正合函子保持这些极限以及余极限.

更进一步, [Groth, 2016] 给出了稳定范畴的另一刻画.

命题 2.2.14. . 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, 则其为稳定的当且仅当其具有有限极限与有限余极限, 且有有限极限与有限余极限可交换.

证明. 一个方向是显然的, 我们只证明另一个方向, 令 $\mathcal{C}$ 为带有有限极限与有限余极限的范畴, 且有限极限与有限余极限相交换, 以下说明 $\mathcal{C}$ 是稳定的, 首先由于有限极限与有限余极限可交换, 因此空极限与空余极限也可交换, 从而得知 $\mathcal{C}$ 带点. 接下来说明 Ω 是等价, 为此对于 $X \in \mathcal{C}$, 考虑图表

$$\begin{array}{ccccc} X & \longleftarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longleftarrow & X & \longrightarrow & X. \end{array}$$

沿着行进行推出, 得到 $0 \rightarrow \Sigma X \leftarrow 0$, 再进行一次拉回得到 $\Omega \Sigma X$ (即整个图表先沿行推出再沿列拉回). 整个图表沿列进行拉回得到 $X \leftarrow X \rightarrow X$, 再进行推出得到还是 X , 因此拉回与推出的交换性说明 $X \xrightarrow{\sim} \Omega \Sigma X$ 为同构. 同理说明 $\Sigma \Omega X \xrightarrow{\sim} X$ 为同构, 因此得知 Ω 为范畴等价, 即 $\mathcal{C}$ 稳定. $\square$

以下介绍正合函子.

定义 2.2.15. . 令 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴.

- 若 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 均带点, 称函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是**带点**的是指其保持零对象;
- 称函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是**左正合**的是指 F 保持有限极限;
- 称函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是**右正合**的是指 F 保持有限余极限;
- 称函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是**正合**的是指其左正合且右正合.

命题 2.2.16. . 令 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为稳定范畴之间的带点函子, 则以下条件等价:

1. F 是正合的;
2. F 保持始对象以及推出;
3. F 保持终对象以及拉回

这由引理 2.2.11 立刻得出. 由于正合函子在复合下是封闭的, 因此可以得到以下定义:

定义 2.2.17. . 全体小稳定范畴所构成的范畴 $\text{Cat}^{\text{st}} \subset \text{Cat}$ 是由稳定范畴及其间正合函子所构成的非全子范畴.

以下讨论更多一点的性质.

命题 2.2.18. . 令 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴, 则对于任意范畴 $\mathcal{I}$, 都有 $\text{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ 为稳定范畴.

证明. 一切可以约化为函子范畴的极限与余极限是逐点计算的. $\square$

定理 2.2.19. . Cat^{st} 是完备的, 且含入函子 $\text{Cat}^{\text{st}} \hookrightarrow \text{Cat}$ 保持小极限.

证明. 利用引理 2.2.11 说明以下内容:

- 一族稳定范畴 $(\mathcal{C}_\alpha)_{\alpha \in A}$ 稳定范畴的乘积 $\mathcal{C} = \prod_{\alpha \in A} \mathcal{C}_\alpha$ 仍稳定, 且对于稳定范畴 $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 正合当且仅当 $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_\alpha$ 均正合;
- 稳定范畴的拉回仍稳定, 且正合函子关于拉回封闭.

前者显然带点, 至于极限 = 余极限可以约化为极限与余极限的逐点计算. 以下考虑图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}' & \xrightarrow{G'} & \mathcal{C} \\ F' \downarrow & \text{PB} & \downarrow F \\ \mathcal{D}' & \xrightarrow{G} & \mathcal{D}. \end{array}$$

其中 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{D}'$ 均为稳定范畴, 且 F 和 G 均为正合函子. 根据 [Lurie, 2009b, Theorem 5.4.5.5] 可知空图表在 F' 和 G' 会保持有限余极限, 由于 $\mathcal{C}'$ 的极限也可经由 G' 和 F' 计算得到, 从而 $\mathcal{C}'$ 稳定. 从而 G' 与 F' 自动正合. $\square$

完全类似地, 可以说明

定理 2.2.20. . Cat^{st} 关于滤过余极限封闭, 并且 $\text{Cat}^{\text{st}} \hookrightarrow \text{Cat}$ 保持这些滤过余极限.

证明. 此处稳定性有滤过余极限的构造可知, 可以将滤过余极限中的纤维列提升到某一项中进行具体计算. $\square$

定义 2.2.21. . 将全体带有有限极限的范畴及其间左正合函子所生成的 Cat 的子范畴记为 Cat^{lex} .

2.2.3 稳定范畴与三角范畴

接下来类比稳定范畴与三角范畴, 我们将看到稳定范畴在 1-范畴上的投影会自然地具有三角结构, 虽然并不是所有的三角范畴都会是某个稳定范畴的投影. 默认读者具有三角范畴的相关知识.

在上一小节我们已然说明, 当 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴时, Ω 与 Σ 互逆, 结合在 Top 中的观察, 我们知道 Σ 表示提升一个维数, 而 Ω 表示降低一个维数, 因此我们可以给出以下符号约定:

记号 2.2.22. . 若 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴, 且 $n \geq 0$, 记 $X \mapsto X[n]$ 为 $\Sigma^n X$. 若 $n \leq 0$, 则记 $X \mapsto X[n]$ 为 $\Omega^{-n} X$. 我们同样以这种记号标记在同伦范畴 $h\mathcal{C}$ 中的情况.

定义 2.2.23. . 令 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴. 给定 $h\mathcal{C}$ 中的图表

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1].$$

称该图表为**好三角**是指存在 $\mathcal{C}$ 中的图表

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \text{PO} & \downarrow \tilde{g} & \text{PO} & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{\tilde{h}} & W. \end{array}$$

使得 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 分别对应于 f 和 g , 且 $h: Z \rightarrow X[1]$ 是 $\tilde{h}$ 复合上 $W \simeq X[1]$.

注记 2.2.24. . 不难发现由推出的过渡性, 上图可以转化为 $W \simeq \Sigma X = X[1]$. 这样一来你的三角就具有典范的定义, 不会出现不典范的态射, 上述条件还可以继续放宽到带有余纤维范畴上.

定理 2.2.25. . 上述定义所给出的 $h\mathcal{C}$ 确实是三角范畴.

证明. [Lurie, 2017, Theorem 1.1.2.14] □

警告 2.2.26. . [Muro et al., 2007] 说明具有不带有模型结构的三角范畴, 使用如今的语言来说就是无法表现成某个稳定范畴 $\mathcal{C}$ 的同伦范畴的三角范畴, 不过我们知道, 导出范畴以及谱范畴等范畴都是具有模型结构的, 因此同调代数实际上可以抛弃三角范畴语言.

定义 2.2.27. . 令 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴, 且 $X, Y \in \mathcal{C}$ 为对象. 令 $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X, Y)$ 表示 Abel 群 $\text{Hom}_{h\mathcal{C}}(X[-n], Y)$. 若 n 为负数, 则 $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X, Y) = \pi_{-n} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

2.2.4 谱的范畴

本节进入正题, 如何将一个范畴变为稳定范畴呢? 答案其实早已潜藏在了定义中, 定义 2.2.1 表明我们需要做的事情就只是将 Ω 或 Σ 其中之一逆过来.

那么该如何取逆? 参考环的局部化或许可以给我们带来一些见解²

令 A 为环, $f \in A$ 为元素, 则 A 关于 f 生成的乘性子集的局部化 A_f 可计算为余极限

$$A_f = \varinjlim \left(A \xrightarrow{f} A \xrightarrow{f} A \xrightarrow{f} \dots \right)$$

因此我们可以如法炮制, 对于范畴 $\mathcal{C}$, 它关于环路函子 Ω 的局部化可计算为极限 (注意到环路函子是拉回, 所以使用极限).

定义 2.2.28. . 令 $\mathcal{C}$ 为带有有限极限的范畴, 定义其**稳定化** $\text{Sp}(\mathcal{C})$ 为在 $\widehat{\text{Cat}}$ 中的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\text{op}}$ -型极限

$$\text{Sp}(\mathcal{C}) := \varprojlim \left(\dots \xrightarrow{\Omega} \mathcal{C}_* \xrightarrow{\Omega} \mathcal{C}_* \right)$$

$\text{Sp}(\mathcal{C})$ 中对象称为 $\mathcal{C}$ 中的**谱对象**. 当 $\mathcal{C} = \text{Ani}$ 时, 将 $\text{Sp}(\mathcal{C})$ 简记为 Sp , 称为**谱的范畴**.

²注意到环可以视为只带有一个对象的 **Ab**-范畴, 此处仅当范畴看即可.

现在令 $\mathcal{C}$, 根据极限的具体刻画, 不难发现其内对象形如一族 $\mathcal{C}$ 中对象 $(X_i)_i$, 满足 $\Omega X_{i-1} \simeq X_i$, 当 $\mathcal{C} = \mathbf{Ani} \simeq \mathbf{Top}$ 时, 我们所得到的东西就是定义 1.2.6 中的谱.

例 2.2.29. . 令 A 为 Abel 群, Eilenberg–MacLane 谱 $HA \in \mathbf{Sp}$.

不难发现这般定义的稳定化会带有自然的投影函子 $\Omega^{\infty-n}: \mathbf{Sp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$.

定理 2.2.30. . $\mathbf{Sp}(\mathcal{C})$ 是自动稳定的.

证明. [Cnossen, 2025b, Theorem 3.4.5]. □

从而可以给出稳定范畴的又一大判别条件.

命题 2.2.31. . 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, 则 $\mathcal{C}$ 稳定当且仅当 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}$.

证明. 若 $\mathcal{C}$ 稳定则 Ω 为等价, 因此 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}$. 若 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}$, 则定理 2.2.30 表明 $\mathcal{C}$ 是稳定的. □

接下来我们继续讨论谱的范畴的结构.

命题 2.2.32. . 若 $\mathcal{C}$ 为可表现范畴, 则其稳定化 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C})$ 是可表现的.

证明. 注意到 $\mathcal{C} \in \mathbf{Pr}^R$, 且 Ω 作为极限自然保持极限, 因此 $\Omega \in \mathbf{Pr}^R$, 根据命题 2.1.29 可知 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C}) = \varprojlim \left(\cdots \xrightarrow{\Omega} \mathcal{C}_* \xrightarrow{\Omega} \mathcal{C}_* \right) \in \mathbf{Pr}^R$. □

此时 Ω 作为右伴随, 根据定理 2.1.25 可知它保持滤过余极限.

推论 2.2.33. . 对于可表现范畴 $\mathcal{C}$, 其稳定化 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C})$ 等价于 $\mathbf{Pr}^L$ 中的余极限 $\varinjlim \left(\mathcal{C}_* \xrightarrow{\Sigma} \mathcal{C}_* \xrightarrow{\Sigma} \cdots \right)$

证明. 由推论 2.1.30 立即得到. □

特别地, 取 $\mathcal{C} = \mathbf{Ani}$ 时, 可知 $\mathbf{Sp}$ 是可表现范畴.

定义 2.2.34. . 将 $\mathbf{Pr}^L$ 中全体可表现稳定范畴及其间正合函子所生成的子范畴记为 $\mathbf{Pr}^{\text{st}}$.

以下给出一些注记

注记 2.2.35. . 若 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴, 则 $\mathcal{C}^\kappa$ (定义 2.1.23) 也是稳定的: 只需说明 κ -紧对象关于取纤维封闭以及若 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ 为纤维列, 则 $Y[-1] \rightarrow Z[-1] \rightarrow X$ 为余纤维列即可.

反过来, 若 $\mathcal{C}$ 是小稳定范畴, 则 $\text{Ind}_\kappa(\mathcal{C})$ 也是稳定的, 细节可参见 [Lurie, 2017, Proposition 1.1.3.6].

命题 2.2.36. . 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, 则以下条件等价:

1. $\mathcal{C}$ 是可表现且稳定的;
2. 存在可表现, 稳定范畴 $\mathcal{D}$ 使得 $\mathcal{C}$ 为其可达左正合的 Bousfield 局部分化;

3. 存在小范畴 $\mathcal{E}$ 使得 $\mathcal{C}$ 等价于 $\text{Fun}(\mathcal{E}, \text{Sp})$ 的可达左正合局部化.

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.4.4.9] □

以下研究稳定化的泛性质.

命题 2.2.37. . 令 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 为可表现范畴且 $\mathcal{D}$ 为稳定范畴. 则

1. $\Omega^\infty: \text{Sp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$, 具有左伴随 $\Sigma_+^\infty: \mathcal{C} \rightarrow \text{Sp}(\mathcal{C})$;
2. $G: \mathcal{D} \rightarrow \text{Sp}(\mathcal{C})$ 具有左伴随当且仅当 $\Omega^\infty \circ G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 具有左伴随.

注记 2.2.38. . 此时将 Σ_+^∞ 称为非约化纬悬谱.

证明. 由于带点函子为遗忘函子的左伴随, 因此一切约化到带点范畴 $\mathcal{C}_*$ 上.

1. 由于 $\text{Sp}(\mathcal{C})$ 作为 $\mathcal{C}_*$ 的极限, 因此 $\Omega^\infty: \text{Sp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}_*$ 为 Pr^R 中态射, 从而可知 Ω^∞ 存在左伴随 Σ^∞ . 从而可知结果;
2. 由稳定化构造可知 $G: \mathcal{D} \rightarrow \text{Sp}(\mathcal{C})$ 无异于给出一族函子 $\Omega^{\infty-n} \circ G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}_*$, 从而前者有左伴随相当于说每个 $\Omega^{\infty-n} \circ G$ 均有左伴随, 一切可以约化为 $\Omega^\infty \circ G$ 的情况.

□

由此可以得到稳定化的泛性质如下:

推论 2.2.39. (稳定化的泛性质). 令 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为可表现范畴, 且 $\mathcal{D}$ 为稳定范畴. 则典范态射 $\mathcal{C} \rightarrow \text{Sp}$. 则前复合上 $\mathbb{S}[-]$ 诱导出范畴等价

$$\text{Fun}^L(\text{Sp}(\mathcal{C}), \mathcal{D}) \xrightarrow{\sim} \text{Fun}^L(\mathcal{C}, \mathcal{D}).$$

此外, 当 $\mathcal{C} = \text{Ani}$ 时, 有范畴等价

$$\text{Fun}^L(\text{Sp}, \mathcal{D}) \simeq \mathcal{D}.$$

注记 2.2.40. . 这相当于说明 Sp 是单点所生成的稳定范畴.

以下给出当 $\mathcal{C} = \text{Ani}$ 时, 非约化纬悬谱的具体刻画

构造 2.2.41. (纬悬谱). 考虑函子 $Q: \text{Ani}_* \rightarrow \text{Ani}_*$, 使得

$$Q(X) := \varinjlim_{n \geq 0} \Omega^n \Sigma^n X$$

由 $\Sigma \dashv \Omega$ 的单位 $X \rightarrow \Omega \Sigma X$ 可诱导出比较态射. 利用 Ω 保持滤余极限可知

$$\Omega Q(\Sigma X) = \Omega(\varinjlim_{n \geq 0} \Omega^n \Sigma^{n+1} X) \simeq \varinjlim_{n \geq 0} \Omega^{n+1} \Sigma^{n+1} X \simeq Q(X).$$

从而可定义谱 $\Sigma^\infty X$ 使得 $\Sigma^\infty(X)_n := Q(\Sigma^n X)$, 称为 X 的**纬悬谱**.

不难看出前述构造关于 X 的函子性, 进而纬悬谱可构成函子

$$\Sigma^\infty[-]: \text{Ani}_* \rightarrow \text{Sp}.$$

定义 2.2.42. (非约化维悬谱). 令 X 为生象. 定义其**约化维悬谱** $\mathbb{S}[X] \in \mathbf{Sp}$ 为

$$\mathbb{S}[X] := \Sigma^\infty(X_+),$$

此处 $X_+ := X \sqcup *$. 由此定义出函子

$$\mathbb{S}[-]: \mathbf{Ani} \rightarrow \mathbf{Sp}.$$

当 $X = *$ 时, 定义**球谱**为

$$\mathbb{S} := \mathbb{S}[*] = \Sigma^\infty(S^0),$$

命题 2.2.43. . 非约化维悬谱函子 $\mathbb{S}^\infty[-]$ 就是命题 2.2.37 中所述的 Σ_+^∞ .

证明. 仍然由带点化函子为左伴随约化到 $\mathbf{Ani}_*$ 的情况, 从而只需说明维悬谱函子是 Ω^∞ 的左伴随即可. 对于带点生象 X , 有典范态射

$$u_X: X = \Omega^0 \Sigma^0 X \rightarrow QX = \Omega^\infty \Sigma^\infty X.$$

以下说明 u_X 是 $\Sigma^\infty \dashv \Omega^\infty$ 的单位, 即其给出三角等式. 换句话说, 对于全体谱 Y , 下述态射复合为同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(\Sigma^\infty X, Y) \xrightarrow{\Omega^\infty} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(\Omega^\infty \Sigma^\infty X, \Omega^\infty Y) \xrightarrow{- \circ u_X} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(X, \Omega^\infty Y)$$

为此考虑图表

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \nearrow \simeq & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(\Sigma^2 X, Y_2) & \xrightarrow{\Omega} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(\Omega \Sigma^2 X, Y_1) & \xrightarrow{\Omega} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(\Omega^2 \Sigma^2 X, Y_0) \\ & \searrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(\Sigma X, Y_1) & \xrightarrow{\Omega} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(\Omega \Sigma X, Y_0) \\ & & \searrow \simeq & & \downarrow \\ & & & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(X, Y_0) \end{array}$$

此处将 Y_i 视为 $\Omega^{\infty-i}(Y)$, 由于对角态射为同构, 因此沿对角态射的极限同构于 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(X, \Omega^\infty Y)$. 而该极限由可以先对列求再对行求, 沿第 k 列处的极限可以被计算为

$$\varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(\Omega^n \Sigma^{n+k} X, Y_k) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(\varprojlim_n \Omega^n \Sigma^{n+k} X, Y_k) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(Q\Sigma^k X, Y_k).$$

再对行计算极限得到

$$\varprojlim_k \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(Q\Sigma^k X, Y_k) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(\Sigma^\infty X, Y).$$

□

非约化纬悬谱函子可以类比于自由函子.

此时我们可以打个表类比经典的代数和稳定同伦, 具体内容请读者见 [Lurie, 2017] 或 [Hebestreit, 2021], [Cnossen, 2025a].

代数	稳定同伦
Ab	Sp
整数环 $\mathbb{Z}$	球谱 $\mathbb{S}$
集合 S	生象 $X_0 = \Omega^\infty X$
自由生成 Abel 群 $\mathbb{Z}[S]$	非约化纬悬谱 $\mathbb{S}[X]$
交换环	$\mathbb{E}_\infty$ -环
Mod_R	$\mathcal{D}(R)$

注记 2.2.44. . 对于这部分内容, 我们将统称为“高阶代数”, 注意到高阶代数与我们将在第 3.2 节介绍的“导出代数”是不同的, 后者着眼于生象化.

2.2.5 谱的展示

回忆到, 对于 Abel 群 A , A 的展示就相当于说将 A 写为以下态射的余核

$$A = \text{coker}(\mathbb{Z}[T] \xrightarrow{f} \mathbb{Z}[S]).$$

当取 S 为 A 遗忘掉群结构后得到的集合且 T 为 $\mathbb{Z}[A]$ 遗忘掉群结构后得到的集合时, 就称为标准展示. 以下谈论在谱中的类似版本.

定义 2.2.45. (预谱). **预谱**是指一族带点生象 $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 配上未必可逆的态射 $\sigma_n: X_n \rightarrow \Omega(X_{n+1})$. 预谱之间的态射 $f: X \rightarrow Y$ 是指一族带点态射 $f_n: X_n \rightarrow Y_n$, 对于每个 $n \geq 0$, 都有 Ani 中的交换图表

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n \\ \sigma_n^X \downarrow & & \downarrow \sigma_n^Y \\ \Omega(X_{n+1}) & \xrightarrow{\Omega(f_{n+1})} & \Omega(Y_{n+1}). \end{array}$$

将预谱所构成的范畴记作 PSp .

我们的想法是将预谱视为谱的展示. 注意到每个谱都自动是一个预谱. 反过来, 我们可以通过以下方式将预谱转为谱:

构造 2.2.46. . 给定预谱 X , 对应其**对应谱** X^{sp} 为 Sp 中的余极限

$$X^{\text{sp}} := \varinjlim (\Sigma^\infty X_0 \rightarrow (\Sigma^\infty X_1)[-1] \rightarrow (\Sigma^\infty X_2)[-2] \rightarrow \cdots),$$

记 $\varepsilon: \Sigma\Omega \rightarrow \text{id}$ 为 $\Sigma \dashv \Omega$ 的余单位, 则对应谱中的比较态射可由以下方式逐阶给出:

$$(\Sigma^\infty X_n)[-n]_k = (\Sigma^\infty X_n)_{k-n} = Q\Sigma^{k-n}X_n \xrightarrow{\sigma_n} Q\Sigma^{k-n}\Omega X_{n+1} \xrightarrow{\varepsilon} Q\Sigma^{k-(n+1)}X_{n+1} = (\Sigma X_{n+1})[-(n+1)]_k.$$

注记 2.2.47. . 上述构造给出函子 $(-)^{\text{sp}}: \text{PSp} \rightarrow \text{Sp}$, 它是遗忘函子 $U: \text{Sp} \hookrightarrow \text{PSp}$ 的左伴随.

命题 2.2.48. (标准展示). 每个谱 X 都自然同构于 $(UX)^{\text{sp}}$.

证明. 固定谱 $Y \in \text{Sp}$, 有

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Sp}}((UX)^{\text{sp}}, Y) &\simeq \varprojlim_n \text{Hom}_{\text{Sp}}((\Sigma^\infty X_n)[-n], Y) \\ &\simeq \varprojlim_n \text{Hom}_{\text{Sp}}(\Sigma^\infty X_n, Y[n]) \\ &\simeq \varprojlim_n \text{Hom}_{\text{Ani}_*}(X_n, \Omega^\infty Y_n) \\ &\simeq \varprojlim_n \text{Hom}_{\text{Ani}_*}(X_n, Y_n) \simeq \text{Hom}_{\text{Sp}}(X, Y). \end{aligned}$$

□

因此, 可使用这种方式表述 Sp 中的余极限.

推论 2.2.49. . 给定图表 $F: \mathcal{I} \rightarrow \text{Sp}$, 则

$$\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} F(i) = ((\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} F(i)_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}})^{\text{sp}},$$

此处预谱的结构态射由以下态射给出:

$$\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} F(i)_n \xrightarrow{\varinjlim_i (\sigma_n)} \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} \Omega F(i)_{n+1} \rightarrow \Omega(\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} F(i)_{n+1}).$$

2.2.6 t-结构

本节来介绍稳定范畴上的 t-结构, 这是三角范畴的 t-结构的推广. 粗略来说, 稳定范畴 $\mathcal{C}$ 上的 t-结构是指由全子范畴所构成的二元组 $(\mathcal{C}_{\leq 0}, \mathcal{C}_{\geq 0})$ 满足一些使得 $\mathcal{C}_{\geq 0}$ (或 $\mathcal{C}_{\leq 0}$) 中对象均“只存在于非负 (或非正) 数阶”. 这样可以恢复出一个 Abel 范畴, 更进一步, 可以帮助我们恢复出在稳定范畴上的同伦 (若着眼于同调代数, 即为同调). 关于 t-结构, 最原始的文献是 [Pierre Deligne and Bernstein, 1983].

定义 2.2.50. . 令 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴. $\mathcal{C}$ 的 **t-结构** 是指二元组 $(\mathcal{C}_{\leq 0}, \mathcal{C}_{\geq 0})$, 满足:

1. $\mathcal{C}_{\geq 0}$ 和 $\mathcal{C}_{\leq 0}$ 均为 $\mathcal{C}$ 的全子范畴, 且关于同构封闭, 即只要包含某个对象, 就会包含所有与之同构的对象;
2. 对 $n \in \mathbb{Z}$, 记 $\mathcal{C}_{\geq n} := \mathcal{C}_{\geq 0}[n]$ 以及 $\mathcal{C}_{\leq n} := \mathcal{C}_{\leq 0}[n]$. 则 $\mathcal{C}_{\geq 1} \subseteq \mathcal{C}_{\geq 0}$, $\mathcal{C}_{\leq 0} \subseteq \mathcal{C}_{\leq 1}$;
3. 对 $X \in \mathcal{C}_{\geq 1}$, $Y \in \mathcal{C}_{\leq 0}$, 有 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \simeq 0$;
4. 对于 $X \in \mathcal{C}$, 存在纤维列 $X' \rightarrow X \rightarrow X''$ 使得 $X' \in \mathcal{C}_{\geq 1}$ 且 $X'' \in \mathcal{C}_{\leq 0}$.

定义-命题 2.2.51. . 令 $\mathcal{C}$ 为配有 t -结构的稳定范畴, 则对于每个 $n \in \mathbb{Z}$, 全子范畴 $\mathcal{C}_{\leq n}$ 都是 $\mathcal{C}$ 的左 Bousfield 局部化, 将局部化函子记为 $\tau_{\leq n}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\leq n}$. 对偶地, 全子范畴 $\mathcal{C}_{\geq n}$ 都是 $\mathcal{C}$ 的右 Bousfield 局部化, 将局部化函子记为 $\tau_{\geq n}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\geq n}$.

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.2.1.5], 具体证明实际上是套用 Whitehead 定理. $\square$

推论 2.2.52. . 令 $\mathcal{C}$ 为配有 t -结构的稳定范畴, 则对于每个 $n \in \mathbb{Z}$, 全子范畴 $\mathcal{C}_{\leq n} \subseteq \mathcal{C}$ 关于 $\mathcal{C}$ 的极限封闭. 对偶地, 全子范畴 $\mathcal{C}_{\geq n} \subseteq \mathcal{C}$ 关于 $\mathcal{C}$ 中的余极限封闭.

注记 2.2.53. . 对于 $m, n \in \mathbb{Z}$, 不难发现函子 $\tau_{\leq n}$ 和 $\tau_{\geq n}$ 限制到 $\mathcal{C}_{\leq m}$ 上总是一个自己到自己的函子 (不一定为等价).

令 $\mathcal{C}$ 为配有 t -结构的稳定范畴, 且令 $m, n \in \mathbb{Z}$. 前述注记表明具有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{\geq n} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ \downarrow \tau_{\leq m} & & \downarrow \tau_{\leq m} \\ \mathcal{C}_{\geq n} \cap \mathcal{C}_{\leq m} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{\leq m}. \end{array}$$

不难发现根据定义 2.1.7 可知存在左 Beck–Chevalley 变换

$$\gamma: \tau_{\leq m} \circ \tau_{\geq n} \rightarrow \tau_{\geq n} \circ \tau_{\leq m}$$

以下说明其为同构, 即上述图表是左可伴随的.

命题 2.2.54. . 令 $\mathcal{C}$ 为带有 t -结构的稳定范畴, 则 Beck–Chevalley 变换 $\gamma: \tau_{\leq m} \circ \tau_{\geq n} \rightarrow \tau_{\geq n} \circ \tau_{\leq m}$ 是同构.

证明. 一切可以约化到同伦范畴之上, 因此转变为经典的三角范畴结果. $\square$

现在可以考虑 $\mathcal{C}_{\geq 0} \cap \mathcal{C}_{\leq 0}$, 我们将这一结构称为 t -结构的心.

定义-命题 2.2.55. . 全子范畴 $\mathcal{C}_{\geq 0} \cap \mathcal{C}_{\leq 0}$ 是某个 Abel 范畴的脉. 称其为 t -结构的**心**, 记作 $\mathcal{C}^\heartsuit$.

证明. 为此只需观察到 $\pi_n \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \simeq \operatorname{Ext}_{\mathcal{C}}^{-n}(X, Y)$, 当 $X, Y \in \mathcal{C}^\heartsuit$ 时, $\operatorname{Ext}_{\mathcal{C}}^{-n}(X, Y) = \pi_0 \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X[n], Y)$ 在 $n > 0$ 时消失, 因此 $\mathcal{C}^\heartsuit$ 确为 $(1, 1)$ -范畴, 并且为 $h\mathcal{C}$ 配上 t -结构所得到的心, 由三角范畴的经典论证可知 $h\mathcal{C}^\heartsuit$ 为 Abel 范畴. $\square$

我们可以由 t -结构恢复出稳定同伦概念³.

定义-命题 2.2.56. . 对 $X \in \mathcal{C}$, 记 $\pi_n(X) := (\tau_{\geq n} \tau_{\leq n} X)[-n] \in \mathcal{C}^\heartsuit$, 称为 X 关于该 t -结构的**稳定同伦**, 则对纤维列 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ 有 $\mathcal{C}^\heartsuit$ 中的长正合列

$$\cdots \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y) \rightarrow \pi_n(Z) \rightarrow \pi_{n-1}(X) \rightarrow \cdots$$

³事实上, 如果关心同调代数, 此时应该称为同调, 如果使用上同调约定, 此时应该称为上同调.

证明. 由 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ 可延伸出长正合列 $\cdots \rightarrow Z[-1] \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1] \rightarrow Y[1] \rightarrow \cdots$ 立刻得到. $\square$

以下命题刻画说明如何经由局部化刻画 t -结构

命题 2.2.57. . 令 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴, $L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 为局部化函子且 S 为 $\mathcal{C}$ 中一族使得 $f \in S$ 都有 $L(f)$ 为等价的态射. 则以下条件等价:

1. 存在一族态射 $\{0 \rightarrow X: L(X) \simeq 0\}$ 生成 S ;
2. $L(\mathcal{C})$ 关于扩张封闭, 即考虑 $\mathcal{C}$ 中态射 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ 则若 X 和 Z 在 $L(\mathcal{C})$ 中, 则 Y 也在;
3. 对于任意 $A \in \mathcal{C}$ 和 $B \in L(\mathcal{C})$ 有 $\text{Ext}^1(LA, B) \hookrightarrow \text{Ext}^1(A, B)$ 为单射;
4. 全子范畴 $\mathcal{C}_{\geq 0} = \{A: LA \simeq 0\}$ 和 $\mathcal{C}_{\leq -1} = \{A: LA \simeq A\}$ 确定了 $\mathcal{C}$ 上的 t -结构.

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.2.1.16] $\square$

如三角范畴一般, 可以探讨 t -结构的有界性以及完备性.

定义 2.2.58. . 称稳定范畴 $\mathcal{C}$ 的 t -结构 $(\mathcal{C}_{\geq 0}, \mathcal{C}_{\leq 0})$ 为:

- 左有界的, 是指 $\mathcal{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_{\leq n}$;
- 右有界的, 是指 $\mathcal{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_{\geq n}$;
- 有界的, 是指 $\mathcal{C}$ 既是左有界的又是右有界的;
- 左分离的, 是指 $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_{\leq n} = 0$;
- 右分离的, 是指 $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_{\geq n} = 0$;

我们还可以考虑 Cat 中的极限

$$\widehat{\mathcal{C}} := \varprojlim_{n \in \mathbb{Z}} \left(\cdots \rightarrow \mathcal{C}_{\leq 2} \xrightarrow{\tau_{\leq 1}} \mathcal{C}_{\leq 1} \xrightarrow{\tau_{\leq 0}} \mathcal{C}_{\leq 0} \xrightarrow{\tau_{\leq -1}} \cdots \right).$$

使用 Cat 中极限的具体刻画可知, 其为 $\text{Fun}(\mathbb{Z}, \mathcal{C})$ 中的以下函子 $F: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{C}$ 所张成的全子范畴:

- 对于每个 $n \in \mathbb{Z}$, 都有 $F(n) \in \mathcal{C}_{\leq -n}$;
- 对于 $m \leq n \in \mathbb{Z}$, 都有 $F(m) \rightarrow F(n)$ 诱导出等价 $\tau_{\leq -n} F(m) \rightarrow F(n)$.

定义 2.2.59. . 令 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴, 则上述定义的 $\widehat{\mathcal{C}}$ 称为 $\mathcal{C}$ 的左完备化. 称稳定范畴 $\mathcal{C}$ 是左完备的是指 $\mathcal{C} \simeq \widehat{\mathcal{C}}$. 类似地定义右完备.

命题 2.2.60. . 令 $\mathcal{C}$ 为配有 t -结构的稳定范畴, 则:

1. $\widehat{\mathcal{C}}$ 是稳定范畴;
2. 令 $\widehat{\mathcal{C}}_{\leq 0}$ 和 $\widehat{\mathcal{C}}_{\geq 0}$ 分别为穿过 $\mathcal{C}_{\leq 0}$ 和 $\mathcal{C}_{\geq 0}$ 的函子所张成的全子范畴, 则 $(\widehat{\mathcal{C}}_{\leq 0}, \widehat{\mathcal{C}}_{\geq 0})$ 定义了 $\widehat{\mathcal{C}}$ 上的 t -结构;
3. 存在典范正合函子 $\theta: \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ 其诱导范畴等价 $\mathcal{C}_{\leq 0} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}_{\leq 0}$.

注记 2.2.61. . 不难发现 $\mathcal{C}^+ := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_{\leq n} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 会诱导出范畴等价 $\widehat{\mathcal{C}}^+ \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{C}}$, 并且函子 $\mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ 会诱导出范畴等价 $\mathcal{C}^+ \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}^+$ (注意此时加号位置). 因此左有界的稳定范畴理论和左完备的稳定无穷范畴理论是等价的.

证明.

1. 注意到 $\widehat{\mathcal{C}}$ 可写为极限

$$\widehat{\mathcal{C}} = \varprojlim \left(\cdots \rightarrow \mathcal{C}_{\leq 0} \xrightarrow{\tau_{\leq 0} \Sigma} \mathcal{C}_{\leq 0} \xrightarrow{\tau_{\leq 0} \Sigma} \mathcal{C}_{\leq 0} \right).$$

因此这相当于说 $\widehat{\mathcal{C}}^{\text{op}} \simeq \text{Sp}(\mathcal{C}_{\geq 0})$, 从而稳定;

2. 观察到, $\widehat{\mathcal{C}}$ 上的平移函子应当定义为

$$(F[n])(m) = F(n+m)[n].$$

从而 $\widehat{\mathcal{C}}_{\geq 0}[1] \subseteq \widehat{\mathcal{C}}_{\geq 0}$ 且 $\widehat{\mathcal{C}}_{\leq 0}[-1] \subseteq \widehat{\mathcal{C}}_{\leq 0}$. 此外, 若 $X \in \widehat{\mathcal{C}}_{\geq 0}$ 且 $Y \in \widehat{\mathcal{C}}_{\leq 0}[-1]$, 则根据极限的态射生象计算可知 $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(X, Y)$ 可以被计算为

$$\varprojlim (\cdots \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X(n), Y(n)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X(n-1), Y(n-1)) \rightarrow \cdots)$$

而由 $\mathcal{C}$ 上的 t -结构知道每一项均可缩, 因此 $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(X, Y) \simeq 0$. 最后取 $X \in \widehat{\mathcal{C}}$, $X'' = \tau_{\leq -1} \circ X$, 令 $u: X \rightarrow X''$ 为诱导的态射, 则 $\text{fib}(u) \in \widehat{\mathcal{C}}_{\geq 0}$;

3. 现考虑 $\mathbb{Z} \times \mathcal{C}$ 中由使得 $C \in \mathcal{C}_{\leq -n}$ 的 (n, C) 所张成的全子范畴, 不难看出 $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathcal{C}$ 是 Bousfield 局部化, 记其左伴随为 L . 而 $\text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Fun}(\mathbb{Z}, \mathcal{C}))$ 可经由伴随变为 $\text{Fun}(\mathbb{Z} \times \mathcal{C}, \mathcal{C})$, 因此我们所求的典范函子 $\theta: \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ 可以转化为函子 $\mathbb{Z} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, 而这事实上是 $\mathbb{Z} \times \mathcal{C} \xrightarrow{L} \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ (注意到 $\mathcal{D}$ 其实标识了 $\widehat{\mathcal{C}}$). 接下来说明 θ 是正合函子, 由稳定性可知只需证明右正合, 而截断函子 $\tau_{\leq n}: \mathcal{C}_{\leq n+1} \rightarrow \mathcal{C}_{\leq n}$ 保持极限, 并且 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中有限余极限是逐点计算的, 因此一切又约化为说明

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\theta} \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \tau_{\leq n} \mathcal{C}$$

的正合性, 但这一复合无非是 $\tau_{\leq n}$. 最后说明其诱导范畴等价, 观察到 $\widehat{\mathcal{C}}_{\leq 0}$ 实际上可以写为以下极限

$$\varprojlim \left(\cdots \rightarrow \mathcal{C}_{\leq 0} \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{C}_{\leq 0} \xrightarrow{\tau_{\leq -1}} \mathcal{C}_{\leq -1} \rightarrow \cdots \right)$$

从而可知这确实就是 $\mathcal{C}_{\leq 0}$.

□

命题 2.2.62. . 令 $\mathcal{C}$ 是配有 t -结构的稳定范畴, 且 $\mathcal{C}$ 具有可数余积, 且 $\mathcal{C}_{\geq 0}$ 关于可数余积是封闭的. 则以下条件等价:

1. $\mathcal{C}$ 左完备;
2. $\mathcal{C}$ 左分离.

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.2.1.19]

□

以下探讨 t -结构与可表现范畴间的关系, 在可表现稳定范畴中, t -结构可以由一边所直接给出.

定义 2.2.63. . 令 $\mathcal{C}$ 为可表现范畴, 称 t -结构 $(\mathcal{C}_{\geq 0}, \mathcal{C}_{\leq 0})$ **可达**的是指子范畴 $\mathcal{C}_{\geq 0} \subseteq \mathcal{C}$ 可表现.

命题 2.2.64. . 令 $\mathcal{C}$ 为可表现稳定范畴. 则

1. 若 $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ 为关于余极限和扩张封闭的可表现子范畴, 则存在 $\mathcal{C}$ 上唯一的 t -结构使得 $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_{\geq 0}$;
2. 令 $\{X_\alpha\}$ 为 $\mathcal{C}$ 中的一族对象, 且 $\mathcal{C}'$ 为 $\mathcal{C}$ 中包含 X_α 且在扩张和余极限下封闭的最小全子范畴. 则 $\mathcal{C}'$ 是可表现的.

注记 2.2.65. . 该命题相当于在说可表现稳定范畴 $\mathcal{C}$ 中任意一族对象均可生成可达的 t -结构.

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.4.4.11]

□

以下观察 $\mathbf{Sp}$ 的 t -结构, 由于 $\mathbf{Sp}$ 是可表现稳定范畴, 因此我们可以用上述命题来生成 $\mathbf{Sp}$ 上的 t -结构, 不过我们事实上可以对于一般的可表现范畴 $\mathcal{C}$ 考虑 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C})$ 上的 t -结构.

命题 2.2.66. . 令 $\mathcal{C}$ 为可表现范畴, $\mathbf{Sp}(\mathcal{C})_{\leq -1}$ 为由使得 $\Omega^\infty X$ 为 $\mathcal{C}$ 的终对象的 X 所张成的全子范畴, 则 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C})_{\leq -1}$ 确定了 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C})$ 上的 t -结构.

证明. 根据命题 2.1.26 可知 $X \in \mathbf{Sp}(\mathcal{C})$ 落在 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C})_{\leq -1}$ 中当且仅当

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_\alpha, \Omega^\infty X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}(\mathcal{C})}(\Sigma^\infty C_\alpha, X)$$

对于所有的 $C_\alpha \in \mathcal{C}^\kappa$ 是可缩的 (因为 $\Omega^\infty X$ 为终对象, 而 $\mathcal{C}$ 中所有对象都可写 C_α 的余极限). 从而考虑包含 $\Sigma^\infty(\mathcal{C}^\kappa)$ 并且在扩张和余极限下封闭的范畴 $\mathbf{Sp}_{\geq 0}(\mathcal{C})$, 根据命题 2.2.64 即知 $\mathbf{Sp}_{\geq 0}(\mathcal{C})$ 确定了 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C})$ 上的 t -结构, 而前文相当于在说我们所定义的 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C})_{\leq -1}$ 就是这个 t -结构所对应的 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C})_{\leq -1}$. □

现在令 $\mathcal{C} = \mathbf{Ani}$, 我们得到 $\mathbf{Sp}$ 上的 t -结构, 它会具有一些性质

命题 2.2.67. . $\mathbf{Sp}$ 上的 t -结构是左完备且右完备的, 且其心 $\mathbf{Sp}^\heartsuit$ 典范等价于 $\mathbf{Ab}$. 这种 t -结构也被称为 **Postnikov t -结构**.

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.4.3.6], 实际上前者是直接的验证, 而后者来自于以下一则事实: $X \in \mathbf{Sp}^\heartsuit$ 当且仅当 $X(n)$ 为 $\mathbf{Ani}$ 中的 n 阶 Eilenberg–MacLane 对象, 因此 $\mathbf{Sp}^\heartsuit$ 可以计算为 $\mathbf{Cat}$ 中的极限

$$\varprojlim \left(\cdots \xrightarrow{\Omega} \mathbf{EM}_1(\mathbf{Ani}) \xrightarrow{\Omega} \mathbf{EM}_0(\mathbf{Ani}) \right),$$

此处 $\mathbf{EM}_n(\mathbf{Ani})$ 是 $\mathbf{Ani}$ 中的 n 阶 Eilenberg–MacLane 对象所构成的全子范畴, 而 [Lurie, 2009b, Proposition 7.2.2.12] 说明 $\mathbf{Sp}$ 会等价于 $\mathbf{CGrp}(\mathbf{Disc}(\mathbf{Ani}))$, 即为 $\mathbf{Ab}$ (注意到 $\mathbf{Disc}(\mathbf{Ani}) = \mathbf{Set}$). $\square$

注记 2.2.68. . 对于每个 $n \in \mathbb{Z}$, $X \mapsto \pi_n X$ 都会给出稳定同伦群 $\pi_n: \mathbf{Sp} \rightarrow \mathbf{Ab}$. 当 $n \geq 2$ 时, π_n 即为

$$\mathbf{Sp} \xrightarrow{\Omega^\infty} \mathbf{Ani}_* \xrightarrow{\pi_n} \mathbf{Ab}.$$

此处第二个函子为同伦群函子. 由于 $\mathbf{Sp}$ 是左完备且右完备的, 因此谱间态射 $X \rightarrow Y$ 为同构当且仅当对于 $n \in \mathbb{Z}$ 都有 $\pi_n X \rightarrow \pi_n Y$ 为同构.

由此可以具体将谱的同伦群计算出来: 对于谱 X 以及 $k \in \mathbb{Z}$, 有

$$\pi_k(X) := [\mathbb{S}[k], X] = \pi_0 \mathbf{Hom}_{\mathbf{Sp}}(\mathbb{S}[k], X).$$

2.3 谱的张量积

本节的主要目的在于说明 $\mathbf{Sp}$ 具有对称幺半结构.

2.3.1 Lurie 张量积

在本节中我们讲述 Lurie 张量积, 这是 $\mathbf{Pr}^L$ 上的对称幺半结构, 它的构造类似于模的张量积, 由于其几乎所有结论都来自于 [Lurie, 2017, §4.8.1], 因此将其称为 Lurie 张量积, 关于可表现范畴的相关知识可以参考 [Lurie, 2009b, § 5.5].

记号 2.3.1. . 对于 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E} \in \mathbf{Pr}^L$ 为可表现范畴, 记 $\mathbf{Fun}^{\mathrm{biL}}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E}) \subseteq \mathbf{Fun}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E})$ 限制到为每个分量上分别保持余极限的函子所构成的全子范畴.

定义 2.3.2. (Lurie 张量积). 令 $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbf{Pr}^L$ 为可表现范畴, 它们之间的 **Lurie 张量积**是指可表现范畴 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ 配上限制到每个分量上均保持余极限的函子

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$$

使得对于每个 $\mathcal{E} \in \mathbf{Pr}^L$, 其诱导范畴等价

$$\mathrm{Fun}^L(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fun}^{\mathrm{bi}L}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E}).$$

由定义可以立刻知道

$$\mathrm{Fun}^L(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}, \mathcal{E}) \simeq \mathrm{Fun}^{\mathrm{bi}L}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E}) \simeq \mathrm{Fun}^L(\mathcal{C}, \mathrm{Fun}^L(\mathcal{D}, \mathcal{E})),$$

因此 Fun^L 是这一对称幺半结构的内 Hom. 由于对于任意 $\mathcal{C} \in \mathbf{Pr}^L$ 都有 $\mathrm{Fun}^L(\mathbf{Ani}, \mathcal{C}) \simeq \mathrm{Fun}(*, \mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}$ (定理 2.1.5), 这说明 $\mathbf{Ani} \in \mathbf{Pr}^L$ 是 $(\mathbf{Pr}^L)^\otimes$ 的幺元.

例 2.3.3. . 令 $\mathcal{C} = \mathrm{PSh}(\mathcal{C}_0)$ 且 $\mathcal{D} = \mathrm{PSh}(\mathcal{D}_0)$, 则根据定理 2.1.5 有

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{bi}L}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E}) \simeq \mathrm{Fun}^L(\mathcal{C}, \mathrm{Fun}^L(\mathcal{D}, \mathcal{E})) \simeq \mathrm{Fun}^L(\mathcal{C}, \mathrm{Fun}(\mathcal{D}_0, \mathcal{E})) \simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_0, \mathcal{E}),$$

而这同构于 $\mathrm{Fun}^L(\mathrm{PSh}(\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_0), \mathcal{E})$ 因此

$$\mathcal{C} \otimes \mathcal{D} \simeq \mathrm{PSh}(\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_0) = \mathrm{Fun}((\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_0)^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ani}).$$

例 2.3.4. . 给定 $\mathcal{C}$ 关于态射 $W_{\mathcal{C}}$ 的左 Bousfield 局部化 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$. 以及 $\mathcal{D}$ 关于态射 $W_{\mathcal{D}}$ 的左 Bousfield 局部化 $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$. 则 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}' \otimes \mathcal{D}'$ 是 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ 关于 $W_{\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}}$ 的左 Bousfield 局部化. 因为

$$\mathrm{Fun}^L(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{D}', \mathcal{E}) \simeq \mathrm{Fun}^{\mathrm{bi}L}(\mathcal{C}' \times \mathcal{D}', \mathcal{E}) \simeq \mathrm{Fun}^{\mathrm{bi}L, W_{\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}}\text{-局部}}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E}) \simeq \mathrm{Fun}^{L, W_{\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}}\text{-局部}}(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}, \mathcal{E})$$

由于每个可表现范畴均可写为预层范畴的 Bousfield 局部化, 因此例 2.3.4 以及 2.3.4 给出了一般的 Lurie 张量积的存在性. 事实上, 可以更进一步给出以下公式:

引理 2.3.5. . $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D} \simeq \mathrm{Fun}^R(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D})$.

警告 2.3.6. . 这件事情无论是对于 $\mathcal{C}$ 还是对于 $\mathcal{D}$ 不能以直接的方式具有函子性.

证明. 不妨将 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 写为 $\mathrm{PSh}(\mathcal{C}_0)$ 与 $\mathrm{PSh}(\mathcal{D}_0)$ 的左 Bousfield 局部化, 因此有

$$\begin{aligned} \mathrm{Fun}^R(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D}) &\subseteq \mathrm{Fun}^R(\mathrm{PSh}(\mathcal{C}_0)^{\mathrm{op}}, \mathcal{D}) \\ &\simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_0^{\mathrm{op}}, \mathcal{D}) \\ &\subseteq \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_0^{\mathrm{op}}, \mathrm{PSh}(\mathcal{D}_0)) \\ &\simeq \mathrm{PSh}(\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_0), \end{aligned}$$

其间包含关系由局部化给出, 不难发现 $\mathrm{Fun}^R(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D})$ 为 $\mathrm{PSh}(\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_0)$ 中局部对象所构成的全子范畴, 因此其为 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$. $\square$

引理 2.3.7. . 对于任意可表现范畴 $\mathcal{C} \in \mathbf{Pr}^L$, $\mathbf{Ani}_* \otimes \mathcal{C} = \mathcal{C}_*$.

证明. 将 $\mathbf{Ani}_*$ 视为 $\mathbf{Ani}^{[1]}$ 中全体在 0 处为 $*$ 的箭头所张成的全子范畴, 不难发现有左 Bousfield 局部化 $\mathbf{Ani}^{[1]} \rightarrow \mathbf{Ani}_*$, $(A \rightarrow X) \mapsto X/A$. 从而 $\mathrm{Fun}^R((\mathbf{Ani}_*)^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$ 可以视为 $\mathrm{Fun}([1], \mathcal{C})$ 中在 0 处为 $*$ 的态射所张成的全子范畴, 即为 $\mathcal{C}_*$. $\square$

引理 2.3.8. . 1. $\mathbb{S}[-]: \mathbf{Ani} \rightarrow \mathbf{Sp}$ 诱导范畴等价 $\mathbf{Sp} \simeq \mathbf{Sp} \otimes \mathbf{Sp}$, 即 $\mathbf{Sp}$ 为 $\mathbf{Pr}^L$ 中的交换代数;

2. 可表现范畴 $\mathcal{C} \in \mathbf{Pr}^L$ 是稳定的当且仅当有自然的范畴等价

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Sp} \otimes \mathcal{C},$$

即可表现稳定范畴为 $\mathbf{Sp}$ 在 $\mathbf{Pr}^L$ 上的模.

证明. 对于 $\mathcal{C} \in \mathbf{Pr}^L$, 有 $\mathbf{Pr}^L$ 中的余极限

$$\mathbf{Sp} \otimes \mathcal{C} \simeq \varinjlim \left(\mathcal{C}_* \xrightarrow{\Sigma} \dots \right)$$

而当 $\mathcal{C}$ 稳定时, 后者无非是 $\mathcal{C}$. $\square$

2.3.2 谱的张量积

以下构造谱的张量积, 由引理 2.3.8 可知 $\mathbf{Sp} \in \mathbf{Pr}^L$ 为交换代数, 这直接给出 $\mathbf{Sp}$ 上的对称幺半结构.

由于这来自于 Lurie 张量积, 因此

$$- \otimes -: \mathbf{Sp} \times \mathbf{Sp} \rightarrow \mathbf{Sp}$$

关于双边均保持余极限. 本节使用谱的展示来具体的研究谱的张量积. 由于每个谱均可通过命题 2.2.48 表现为纬悬谱的余极限, 根据 [Hebestreit, 2021, Proposition II.51] 可知纬悬谱函子是对称幺半函子, 因而只需对于纬悬谱构造张量积即可. 那么研究纬悬谱的张量积就需要研究 $\mathbf{Ani}_*$ 上的对称幺半结构.

$\mathbf{Ani}_*$ 上的对称幺半结构被称为缩积, 给定生象 X 和 Y , 定义 X 与 Y 的缩积 $X \wedge Y$ 为推出

$$\begin{array}{ccc} X \vee Y & \longrightarrow & X \times Y \\ \downarrow & \text{PO} & \downarrow \\ * & \longrightarrow & X \wedge Y. \end{array}$$

从而可将谱的张量积刻画入戏啊:

定义 2.3.9. . 令 $X, Y \in \mathbf{Sp}$ 为谱, 则 X 与 Y 的张量积定义为 $\mathbf{Sp}$ 中的余极限

$$X \otimes Y := \varinjlim_n \varinjlim_m (\Sigma^\infty(X_n \wedge Y_m)[-(n+m)]).$$

注记 2.3.10. . 不难发现其幺元为球谱 $\mathbb{S}$.

接下来介绍映射谱的概念以说明谱的张量积是闭对称么半的.

构造 2.3.11. . 令 Y 和 Z 为谱, 对应映射谱 $\text{map}(Y, Z) \in \mathbf{Sp}$ 为

$$\text{map}(Y, Z)_n := \text{Hom}_{\mathbf{Sp}}(Y, Z[n]) \simeq \varprojlim_k \text{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(Y_k, Z_{k+n}),$$

此处结构态射由以下公式给出

$$\text{Hom}_{\mathbf{Sp}}(Y, Z[n]) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Sp}}(Y, \Omega(Z[n+1])) \simeq \Omega \text{Hom}_{\mathbf{Sp}}(Y, Z[n+1]).$$

这定义出函子

$$\text{map}: \mathbf{Sp}^{\text{op}} \times \mathbf{Sp} \rightarrow \mathbf{Sp}.$$

接下来说明 $\mathbf{Sp}$ 是闭对称么半的.

命题 2.3.12. . 对于任意谱 Y , 函子 $\text{map}(Y, -)$ 均为 $- \otimes Y$ 的右伴随.

证明. 直接进行计算得到

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{Sp}}(X \otimes Y, Z) &= \text{Hom}_{\mathbf{Sp}}(\varinjlim_n \varinjlim_m (\Sigma^\infty(X_n \wedge Y_m)[-(n+m)]), Z) \\ &\simeq \varprojlim_{n,m} \text{Hom}_{\mathbf{Sp}}(\Sigma^\infty(X_n \wedge Y_m), Z[n+m]) \\ &\simeq \varprojlim_{n,m} \text{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(X_n \wedge Y_m, Z_{n+m}) \\ &\simeq \varprojlim_{n,m} \text{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(X_n, \text{Hom}(Y_m, Z_{n+m})) \\ &\simeq \varprojlim_n \text{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(X_n, \text{map}(Y, Z)_n) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{Sp}}(X, \text{map}(Y, Z)). \end{aligned}$$

□

对于映射谱, 其上的同伦群就是构造 1.3.4 所建立的上同调理论:

定义 2.3.13. . 令 E 为谱, X 为生象, 定义 X 的 E -系数同调群为

$$E_*(X) := \pi_*(\mathbb{S}[X] \otimes E).$$

对偶地, 定义 X 的第 k 阶 E -系数上同调群为

$$E^*(X) := \pi_{-*} \text{map}(\mathbb{S}[X], E).$$

第3章 同调代数

3.1 同调代数

在阅读本节之前假定读者都已经学过了经典范畴论中的导出范畴构造, 如果没有学过可以参考 [Zheng, 2024] 和 [李文威, 2024].

考虑环化空间 X , 记 $\mathrm{QCoh}(X)$ 为 X 上拟凝聚层所构成的范畴.

我们知道在 fpqc 景 $\mathcal{C}$ 中, 函子

$$X \mapsto \mathrm{QCoh}(X)$$

关于 $\mathcal{C}$ 中的覆盖满足下降条件. 换句话说上面三个函子都会构成 $(2, 1)$ -层 (也就称为叠).

具体而言, 考虑 $\mathcal{C}$ 中的开覆盖 $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$, 有如下的正合列

$$\mathrm{QCoh}(U) \longrightarrow \prod_i \mathrm{QCoh}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{QCoh}(U_i \cap U_j) \rightrightarrows \prod_{i,j,k} \mathrm{QCoh}(U_i \cap U_j \cap U_k)$$

此处 $U_i \cap U_j$ 是指拉回 $U_i \times_U U_j$, 对于熟悉同调代数的读者而言这个设定应该是熟知的.

现在我们考虑 $\mathrm{QCoh}(X)$ 的导出范畴 $D(X) := D_{\mathrm{QCoh}}(X)$. 此时就出现了一个问题, 它无法下降. 我们使用以下例子说明这一问题让我们回到概形. 令 $\mathbb{P}^1$ 为 $\mathbb{Z}$ 上的射影直线. 作为概形, 可以将 $\mathbb{P}^1$ 视为两个仿射直线 $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$ 反着粘起来, 因此可以写为

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec} \mathbb{Z}[X, X^{-1}] & \longrightarrow & \mathrm{Spec} \mathbb{Z}[T] \\ \downarrow & \mathrm{PO} & \downarrow \\ \mathrm{Spec} \mathbb{Z}[U] & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

我们知道若 $D(X)$ 可以下降, 则

$$\begin{array}{ccc} D(\mathbb{P}^1) & \longrightarrow & D(\mathbb{Z}[T]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D(\mathbb{Z}[U]) & \longrightarrow & D(\mathbb{Z}[X, X^{-1}]) \end{array}$$

应当为 (2-范畴意义下的) 拉回图表, 但很可惜, 它不是. 因为事实上存在非零态射 $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(-2)[1]$ 使得其在 $D(\mathbb{Z}[U]) \times_{D(\mathbb{Z}[X, X^{-1}])} D(\mathbb{Z}[T])$ 中为 0. 因此其无法满足下降条件, $\mathbb{P}^1$ 上拟凝聚层的导出范畴信息无法由其仿射区域所确定.

那么问题会出在哪里呢？出在我们对于导出范畴的构造上.

我们知道在构造导出范畴的过程中，我们原本的打算是逆掉全体拟同构，但是在经典范畴论中逆掉弱等价的最佳方式就是将其刻画为某种商.

具体的构造过程请参考任意一本前文提到的同调代数教材，这并不是我们的主题，现在我们直接给出最终得到的东西.

令 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴且 $D^-(\mathcal{A})$ 为其下有界导出范畴. 换句话说我们可以将其中对象描述为这样的链复形

$$P_* = (\cdots \rightarrow P_{n-2} \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_n \rightarrow 0), \text{ 对于任意 } i, P_i \text{ 均投射}$$

由于我们将导出范畴刻画为商，因此其中态射实际上为 $\text{Hom}_{\text{Ch}_*(\mathcal{A})}(P_*, Q_*)$ 中的同伦类. 这就是问题所在，由于我们将态射直接设置为同伦类，因此无法记录两个态射之间是如何同伦的，换句话说，原本我们有这样一个图表

$$\begin{array}{ccc} P_* & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{g} \end{array} & Q_* \end{array}$$

其中 2-箭头 $f \Rightarrow g$ 表示从 f 到 g 的同伦，此外还有 3-箭头，4-箭头... 但是在经典的导出范畴中，我们只剩下

$$P_* \xrightarrow{[f]=[g]} Q_*$$

此处 $[f]$ 和 $[g]$ 表示同伦类. 这样零伦的态射就自动被视为 0 了. 不妨将本节视为稳定范畴的一个重要例子.

3.1.1 Dold-Kan 对应

本节旨在讲述如何将同伦线性化，以得到同调的信息，并且如何将同调的信息对应回同伦上的信息. 这种对应称为 Dold-Kan 对应.

将同伦信息线性化的过程称作 **Dold-Kan 对应**.

注记 3.1.1. . 本小节中若无特殊说明，所论范畴均为 1-范畴.

首先，我们讲述如何从单纯集得到一个链复形，令 $S \in \mathbf{sSet}$ 为单纯集，考虑自由 Abel 群函子所诱导的函子 $\mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sAb}$ ，有 $\mathbb{Z}(S)_n = \mathbb{Z}(S_n)$ 为 S_n 所生成的自由 Abel 群. 不难发现，当 $S = \text{Sing}(E)$ ， $E \in \mathbf{Top}$ 为拓扑空间时， $\mathbb{Z}(S)_n$ 即为奇异同调论中的奇异链群，因此我们可以仿照奇异同调论中的思想，将单纯集编码为链复形.

定义 3.1.2. (Moore 链复形). 令 S 为单纯 Abel 群，对于每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ，定义

$$\partial: \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i: S_n \rightarrow S_{n-1};$$

这使得 $(S_n)_{n \geq 0}$ 连同 ∂_* 构成链复形 $S_* \in \text{Ch}_{\geq 0}(\text{Ab})$ ，称为 **Moore 链复形** 或 **非正规化链复形**，记为 $C_*(S)$.

注意到此时我们并没有用到任何与退化态射相关的信息, 因此上述定义完全可以搬至半单纯 Abel 群中.

不过此时我们仍然可以考虑其上全体退化单形所张成的子链.

构造 3.1.3. . 令 $S \in \mathbf{sAb}$ 为单纯 Abel 群, $D_n(S)$ 为 S_n 中全体退化单形所构成的子群, 即 $D_n(S) := \sum_{i=0}^{n-1} \text{im}(s_{n-1}^i) \subseteq S_n$. 不难说明其构成的链复形 $D_*(S)$ 是 $C_*(S)$ 的子链复形.

以最精简的保留有效信息为原则, $D_*(S)$ 的信息是应当被商掉的, 这一过程称为**正规化**.

构造 3.1.4. . 令 $S \in \mathbf{sAb}$ 为单纯 Abel 群, S_* 为其对应的 Moore 链复形, 定义 $N_*(S) := C_*(S)/D_*(S)$, 称为**正规化链复形**.

事实上, 上述构造也可以写为 S_* 的子链复形的形式.

定义 3.1.5. . 令 $S \in \mathbf{sAb}$ 为单纯 Abel 群, 对 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $0 \leq k \leq n$ 定义

$$N_n(S) := \bigcap_{i=1}^n \ker(S_n \xrightarrow{d_i} S_{n-1}), n \geq 1$$

当 $n = 0$ 时定义为 S_0 . 这连同 $d_0: S_n \rightarrow S_{n-1}$ 在 $N_n(S)$ 上的限制给出链复形 $N_*(X)$, 称为**正规化链复形**.

事实 3.1.6. . 两种方式定义的正规化链复形是同构的. 这一事实实际上可以在 Dold-Kan 对应的具体证明中看出.

不难发现当我们取 $S = \mathbb{Z}(\Delta^n)$ 时, 上述构造给出函子

$$\begin{array}{ccc} \Delta & & \\ \downarrow y & \searrow [n] \mapsto N_*(\mathbb{Z}\Delta^n) & \\ \mathbf{sAb} & \xrightarrow{N} & \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{Ab}). \end{array}$$

我们可以利用实现-脉伴随定义其右伴随为 $\text{DK}(C_*) := [n] \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ab})}(N_*(\mathbb{Z}\Delta^n), C_*)$, 称为 Dold-Kan 对象. 具体刻画其定义:

定义 3.1.7. . 取定 $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{Ab})$ 中的对象 C_* , 依照以下方式定义单纯 Abel 群 $\text{DK}(C_*) \in \mathbf{sAb}$:

- 对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 定义 $\text{DK}_n(C_*) := \bigoplus_{\alpha: [n] \rightarrow [k]} C_k$, 此处 α 取遍 $[n]$ 到 $[k]$ 的全体满射;
- Δ 中的态射 $\beta: [n'] \rightarrow [n]$ 给出的态射 $\text{DK}_n(C_*) \rightarrow \text{DK}_{n'}(C_*)$ 在 $\alpha: [n] \twoheadrightarrow [k]$ 和 $\alpha': [n'] \twoheadrightarrow [k']$ 对应的直和分量定义如下:

– 若 $k' = k$, 且有交换图表

$$\begin{array}{ccc} [n'] & \xrightarrow{\beta} & [n] \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ [k'] & \xrightarrow{\text{id}} & [k] \end{array}$$

则 $C_k \rightarrow C_{k'}$ 是恒等态射 id_{C_k} ;

– $k' = k - 1$, 且有交换图表

$$\begin{array}{ccc} [n'] & \xrightarrow{\beta} & [n] \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ [k'] & \xrightarrow{+1} & [k] \end{array}$$

则 $C_k \rightarrow C_{k'}$ 为边缘态射 $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$;

– 其它情况下 $C_k \rightarrow C_{k'}$ 为零.

$\mathrm{DK}(C_*)$ 称为链复形 C_* 的 **Dold–Kan 对象**, 函子 $\mathrm{DK}: \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathrm{Ab}) \rightarrow \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab}) = \mathbf{sAb}$ 被称为 **Dold–Kan 对应**.

注记 3.1.8. . 一种更自然的视角是这样看: 给定链复形 C_* , 将其上所有面态射拆出可以得到半单纯对象 $C_{\text{单}}$

$$\cdots \rightrightarrows C_2 \rightrightarrows C_1 \rightrightarrows C_0$$

而 $\mathrm{DK}(C_*)$ 相当于左 Kan 延拓

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\text{单}} & & \\ \downarrow & \searrow (C)_{\text{单}} & \\ \Delta & \xrightarrow{\mathrm{Lan}_i(C)_{\text{单}}} & \mathrm{Ab} \end{array}$$

注记 3.1.9. . 不难发现, 取 G 为交换群, $n \geq 0$ 为非负整数, 且令 $G[n]$ 为在 n 处为 G , 在其它地方为 0 的链复形, 不难发现 $\mathrm{DK}(G[n]) = K(G, n)$ 为定义 1.2.1 所给出的 Eilenberg–MacLane 空间, 因此在 [Lurie, 2018a, Tag 00QT] 以及部分其它文献中喜欢将 DK 称为 Eilenberg–MacLane 函子, 不过我们在后文中将更加深入的讨论这一点.

引理 3.1.10. . 伴随对 $N_* \dashv \mathrm{DK}_\bullet$ 构成范畴等价.

证明. [Lurie, 2017, Lemma 1.2.3.13]. □

上述所有内容都可以直接推广到加性范畴 $\mathcal{A}$ 的情况, 只需将单纯 Abel 群改为 $\mathcal{A}$ 中的单纯对象即可. 特别地, Dold–Kan 对应此时变为.

定理 3.1.11. (Dold–Kan 对应). 令 $\mathcal{A}$ 为加性范畴. 则函子

$$\mathrm{DK}_\bullet: \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}) = \mathbf{s}\mathcal{A}$$

全忠实, 特别地, 当 $\mathcal{A}$ 幂等完备时, 其为范畴等价.

证明. [Lurie, 2017, Theorem 1.2.3.7]. □

最后给出一则模型范畴上的事实:

命题 3.1.12. . 在 $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathrm{Ab})$ 上具有以下**投射模型结构**:

1. 弱等价定义为拟同构;
2. 纤维化定义为链复形之间的逐点满射.

且 Dold–Kan 对应给出 Quillen 等价 $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathrm{Ab})_{\mathrm{proj}} \simeq_{\mathrm{Quillen}} \mathrm{sAb}_{\mathrm{Quillen}}$. 此处 $\mathrm{sAb}_{\mathrm{Quillen}}$ 表示 sAb 上带有 sSet 限制而来的 Quillen 模型结构.

注记 3.1.13. . 事实上, 上述结果可以被推广到幂等完备的加性范畴 $\mathcal{A}$ 上, 不过此时给出的是单纯范畴间的弱等价, 经由范畴等价 $\mathrm{Cat} \simeq \mathrm{N}^{\mathrm{hc}}(\mathrm{Kan-Cat})$ 给出对应 $(\infty, 1)$ -范畴间的等价, 证明见 [Lurie, 2017, Proposition 1.3.2.23].

3.1.2 微分分次范畴

注记 3.1.14. . 本小节中若无特殊说明, 所论范畴均为 1-范畴.

而后我们来介绍微分分次范畴, 这是一种描述链复形范畴的高阶信息的方式.

定义 3.1.15. . 令 k 为交换环, k 上的**微分分次范畴** $\mathcal{C}$ 由以下信息组成:

- 集合 $\{X, Y, \dots\}$, 称为 $\mathcal{C}$ 中的**对象**;
- 对于任意的 $X, Y \in \mathcal{C}$, 都有链复形 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_*$

$$\dots \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_1 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_{-1} \rightarrow \dots$$

- 对于任意三元组 (X, Y, Z) , 复合态射定义为

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)_* \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_* \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)_*;$$

- 对于每个 $X \in \mathcal{C}$, 都有**恒等态射** $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)_0$ 使得

$$g \circ \mathrm{id}_X = g, \quad \mathrm{id}_X \circ f = f.$$

使得对于任意 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)_p$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_q$ 以及 $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)_r$ 都有

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

当 $k = \mathbb{Z}$ 时, 称 k 上的微分分次范畴为**微分分次范畴**, 简称 dg-范畴.

例 3.1.16. . 令 $\mathcal{A}$ 为加性范畴, 则 $\mathrm{Ch}_*(\mathcal{A})$ 自动构成微分分次范畴.

构造 3.1.17. . 对于 k 上的微分分次范畴 $\mathcal{C}$, 我们可以通过以下方式将其编译为 $(\infty, 1)$ -范畴. 考虑复合函子

$$\mathrm{Ch}_*(k) \xrightarrow{\tau_{\geq 0}} \mathrm{Ch}_{\geq 0}(k) \xrightarrow{\mathrm{DK}} \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathrm{Mod}_R) \rightarrow \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})$$

Alexander–Whitney 构造说明该函子是右松幺半函子. 它可以将 k 上的微分分次范畴编码为单纯范畴 $\mathcal{C}_{\Delta}$:

- 其对象为 $\mathcal{C}$ 中的对象;
- 对于 $X, Y \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Delta}(X, Y)_\bullet := \mathrm{DK}_\bullet(\tau_{\geq 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_*)$.

称 $\mathcal{C}_\Delta$ 为 $\mathcal{C}$ 的**底单纯范畴**.

定义 3.1.18. . 令 $\mathcal{C}$ 为 k 上的微分分次范畴, 则 $\mathcal{C}$ 的**微分分次脉**定义为其底单纯范畴的同伦脉, 即 $N^{\mathrm{hc}}(\mathcal{C}_\Delta)$.

注记 3.1.19. . 在 [Lurie, 2017, Proposition 1.3.1.17] 表明上述定义与其书内的微分分次脉定义是等价的. 这也说明在构建微分分次脉时, 我们其实并没有用到链复形的全部信息, 事实上定理 3.1.23 表明 k 上的微分分次范畴应当被视为 k -线性稳定范畴, 这样完整的记录了链复形的各阶信息.

命题 3.1.20. . 令 $\mathcal{A}$ 为加性范畴, HE_{ch} 表示其链同伦等价所构成的子集, 则

$$N^{dg}(\mathrm{Ch}_*(\mathcal{A})) \simeq N(\mathrm{Ch}_*(\mathcal{A}))[HE_{ch}^{-1}]$$

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.3.4.5]. □

以下一则结果写给具有相关知识储备的读者, 算是本节的题外话:

定义 3.1.21. . 令 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为 k 上的微分分次范畴, 则从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的**微分分次函子** F 由以下信息组成:

- 对于任意对象 $X \in \mathcal{C}$, 都有 $F(X) \in \mathcal{D}$;
- 对于任意两个对象 $X, Y \in \mathcal{C}$, 都有链复形之间的态射

$$\alpha_{X,Y}: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_* \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X), F(Y))_*.$$

上述信息需要满足以下相容性:

- 对于任意 $X \in \mathcal{C}$, 都有 $\alpha_{X,X}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$;
- 对于任意三元组 $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_p$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)_q$ 都有

$$\alpha_{X,Z}(g \circ f) = \alpha_{Y,Z}(g) \circ \alpha_{X,Y}(f).$$

因此可定义 k 上全体微分分次范畴所构成的范畴, 记为 $\mathrm{Cat}_{dg}k$.

以下揭示其上的模型结构, 由此给出对应的 $(\infty, 1)$ -范畴.

命题 3.1.22. . 令 k 为交换环. 则 $\mathrm{Cat}_{dg}k$ 上存在组合的模型结构, *Dwyer-Kan* 地定义如下:

弱等价. 微分分次函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 被称为是弱等价, 是指 F 诱导出 $h\mathcal{C} \rightarrow h\mathcal{D}$ 上的范畴等价, 并且对于全体 $X, Y \in \mathcal{C}$, 都有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_* \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))_*$ 为拟同构;

纤维化. 微分分次函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 被称为是纤维化是指其满足以下条件:

- F 诱导同伦范畴上的同纤维化;
- 对于任意 $X, Y \in \mathcal{C}$, 都有逐点的满射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_* \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))_*.$$

将该模型范畴所对应的 $(\infty, 1)$ -范畴记为 $\mathrm{Cat}_{\mathrm{dg}}^k$.

证明. [Tabuada, 2004]. □

由此可以得到

定理 3.1.23. (k 上的微分分次范畴是 k -线性稳定范畴). 有 $(\infty, 1)$ -范畴等价

$$\mathrm{Cat}_{\mathrm{dg}}^k \simeq \mathrm{Mod}_{\mathrm{H}k\text{-Mod}}((\mathrm{Pr}^{\mathrm{st}})^{\otimes})$$

即 k 上的微分分次范畴即为 k -线性稳定范畴.

证明. [Cohn, 2016] □

3.1.3 导出范畴

注记 3.1.24. . 本节中, 我们将省略范畴的脉的记号 (虽然在引言的符号约定中已经写过), 当然微分分次脉的记号不会省略. 此外, $K(\mathcal{A})$ 和 $D(\mathcal{A})$ 总是表示 1-范畴中的版本.

本节来描述如何构建导出范畴, 由于我们的工作环境是同伦论, 因此从链复形开始描述导出范畴是更为合适的.

令 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴, $\mathrm{Ch}_*(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 的链复形所构成的范畴. 粗略来说, 导出范畴就是左 Bousfield 局部化 $\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \mathrm{Ch}_*(\mathcal{A})[\mathrm{qis}^{-1}]$.

定义 3.1.25. . Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的链同伦范畴 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 定义为局部化 $\mathrm{Ch}_*(\mathcal{A})[\mathrm{HE}_{\mathrm{ch}}^{-1}]$. 而 $\mathcal{A}$ 的导出范畴 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 定义为局部化 $\mathrm{Ch}_*(\mathcal{A})[\mathrm{qis}^{-1}]$.

注记 3.1.26. . 上述定义无论在经典的 1-范畴还是 $(\infty, 1)$ -范畴中都是成立的, 不过由于 1-范畴中没能记录到高阶信息 (我们只能使用 Gabriel–Zisman 方法将局部化刻画为商), 从而忽略了高阶信息.

本节的目的在于具体地刻画这一局部化, 我们使用微分分次范畴来刻画导出范畴.

根据命题 3.1.20 可知对于 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, $\mathrm{N}^{\mathrm{dg}}(\mathrm{Ch}_*(\mathcal{A})) \simeq \mathrm{Ch}_*(\mathcal{A})[\mathrm{HE}_{\mathrm{ch}}^{-1}]$. 而我们想要构建的导出范畴是 $\mathrm{N}(\mathrm{Ch}_*(\mathcal{A}))[\mathrm{qis}^{-1}]$, 因此我们实际上需要寻找一个使得拟同构即为链同伦等价的 Abel 范畴 $\mathcal{A}'$ 来做到这一切, 我们先来刻画有界的情况.

首先进行一些记号上的约定

记号 3.1.27. . 令 $\mathcal{A}_{\text{proj}}$ 为 $\mathcal{A}$ 中全体投射对象所张成的全子范畴. 类似地, 令 $\mathcal{A}_{\text{inj}}$ 为 $\mathcal{A}$ 中全体内射对象所张成的全子范畴.

记号 3.1.28. . 令 $\mathcal{A}$ 为加性范畴. 记 $\text{Ch}_*(\mathcal{A})$ 中下有界链复形 (即对于 $n \ll 0$ 有 $M_n \simeq 0$ 的 M_*) 所张成的全子范畴为 $\text{Ch}^-(\mathcal{A})$, 对应的链同伦复形范畴为 $\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$. 类似地, 记 $\text{Ch}_*(\mathcal{A})$ 中上有界链复形所张成的全子范畴为 $\text{Ch}^+(\mathcal{A})$, 对应的链同伦复形范畴为 $\mathcal{K}^+(\mathcal{A})$.

而我们知道在 1-范畴中有以下一则事实

命题 3.1.29. . 令 $\mathcal{A}$ 为带有足够投射对象的 Abel 范畴, 则 $K^-(\mathcal{A}_{\text{proj}}) \simeq D^-(\mathcal{A})$.

证明. [Zheng, 2024, Corollary 2.5.24] □

这相当于在说, 上述情况同伦等价即为拟同构, 因此可以得到定义.

定义 3.1.30. . 若 $\mathcal{A}$ 为带有足够投射对象的 Abel 范畴, 则其下有界导出范畴定义为 $\mathcal{D}^-(\mathcal{A}) := \mathcal{K}^-(\mathcal{A}_{\text{proj}})$. 类似地, 若 $\mathcal{A}$ 为带有足够投射对象的 Abel 范畴, 则其上有界导出范畴定义为 $\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) := \mathcal{K}^+(\mathcal{A}_{\text{inj}})$

注记 3.1.31. . [Lurie, 2017, Theorem 1.3.4.4] 说明其确实为 $\text{Ch}^-(\mathcal{A})$ 关于拟同构的局部化, 并且 [Lurie, 2017, Proposition 1.3.4.6] 表明 $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$ 关于拟同构的 Bousfield 局部化.

不难发现有典范地范畴等价 $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})^{\text{op}} \simeq \mathcal{D}^-(\mathcal{A}^{\text{op}})$.

以下说明导出范畴会是稳定的.

命题 3.1.32. . 令 $\mathcal{A}$ 为加性范畴, 则 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 是稳定范畴.

证明. 详细证明见 [Lurie, 2017, Proposition 1.3.2.10], 在此只简述证明过程, 我们只需要证明以下两点:

- $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 是带点范畴;
- $\Sigma: \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A})$ 是等价.

第一点是显然的, 至于第二点, 考虑以下链复形

$$E(1)_k = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k \in \{0, 1\} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

它是 $\mathbb{Z}(\Delta^1)$ 所对应的正规化链复形. 则对于链复形间的态射 $f: M_* \rightarrow M'_*$, 其映射锥 $C(f)_*$ 定义为 $\text{Ch}_*(\mathcal{A})$ 中的推出

$$\begin{array}{ccc} M_* & \longrightarrow & E_*(1) \otimes M_* \\ \downarrow & \text{PO} & \downarrow \\ M'_* & \longrightarrow & C(f)_* \end{array}$$

因而考虑 $C(M_* \rightarrow 0) = \Sigma M_*$, 计算得到其为链复形的平移函子 $M_* \mapsto M_{*-1}$, 而后者显然为范畴等价, 因此 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 稳定. $\square$

推论 3.1.33. . 令 $\mathcal{A}$ 为带有足够投射对象的 *Abel* 范畴, 则导出范畴 $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ 是稳定的 (同理, 对于带有足够内射对象的 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ 也是稳定的).

以下确定 $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ 上的典范 *t*-结构, 不难发现 $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ 上的次数由其同调所决定.

命题 3.1.34. . 令 $\mathcal{A}$ 为带有足够投射对象的 *Abel* 范畴, 则导出范畴 $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ 上带有典范的 *t*-结构 $(\mathcal{D}_{\leq 0}^-(\mathcal{A}), \mathcal{D}_{\geq 0}^-(\mathcal{A}))$, 定义如下:

- $\mathcal{D}_{\leq 0}^-(\mathcal{A})$ 为使得 $n < 0$ 时 $H_n(A_*) = 0$ 的链复形 A_* 所张成的全子范畴;
- $\mathcal{D}_{\geq 0}^-(\mathcal{A})$ 为使得 $n > 0$ 时 $H_n(A_*) = 0$ 的链复形 A_* 所张成的全子范畴.

特别地, $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})^\heartsuit \simeq \mathcal{A}$.

证明. 详细证明见 [Lurie, 2017, Proposition 1.3.2.19], 关于 *t*-结构的部分只是平凡的验证, 我们只描述其心, 注意到 $A_* \mapsto H_0(A_*)$ 给出函子 $\theta: \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$. 令 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{A})$ 为在 $n < 0$ 时 $P_n \simeq 0$ 且 n 非零时 $H_n(P_*) = 0$ 的链复形 P_* 所张成的全子范畴, 则 $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}^-(\mathcal{A})^\heartsuit$. 而计算得到 $\theta|_{\mathcal{C}}$ 会是全忠实的, 因为其没有高阶同调且负数情况为 0, 因而 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P_*, Q_*)$ 离散. 接下来考虑只在 0 阶取为 $A \in \mathcal{A}$, 其余地方为 0 的链复形 A_* , 可知 $A_* \in \mathcal{C}$, 即 $\theta|_{\mathcal{C}}$ 本质满, 因而 $\mathcal{C} \simeq \mathcal{A}$. $\square$

而在 *Grothendieck Abel* 范畴中, 我们可以刻画无界的导出范畴 (由于其具有足够的内射对象, 因而首先考虑其内射模型结构), 这是因为这个时候其上具有合适的内射模型结构.

命题 3.1.35. . 令 $\mathcal{A}$ 为 *Grothendieck Abel* 范畴, 则 $\text{Ch}_*(\mathcal{A})$ 上具有组合的内射模型结构:

弱等价. 弱等价定义为逐点的弱等价;

余纤维. 余纤维化定义为逐点的余纤维化, 即逐点的单射;

警告 3.1.36. . 上述模型结构并非单纯模型结构, 因此不能直接使用定义-命题 2.1.1 看待.

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.3.5.3]. 该证明依赖于 $\mathcal{A}$ 是可表现的以及 (AB5). $\square$

从而, 根据模型范畴的基本知识, 令 $\text{Ch}_*(\mathcal{A})^\circ$ 为命题 3.1.35 中所述模型结构中双纤维性对象所张成的全子范畴, 可以将 $\mathcal{A}$ 的无界导出范畴定义为以下可表现范畴 (命题 3.1.40 将说明这确实是关于拟同构进行局部化):

定义 3.1.37. . 令 $\mathcal{A}$ 为 *Grothendieck Abel* 范畴, 记 $\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \text{N}^{\text{dg}}(\text{Ch}_*(\mathcal{A})^\circ)$.

注记 3.1.38. . 在 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 中, 其内对象其实是 *K*-内射链复形, 其纤维性替换是所谓 *K*-内射消解, 详见 [李文威, 2024, § 3.15], 而由于内射对象构成的上有界链复形必然为 *K*-内射的, 因此 $\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A})$ 为全子范畴.

接下来讨论 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 的性质, 首先我们关注它是否是稳定的.

命题 3.1.39. . 令 $\mathcal{A}$ 为 Grothendieck Abel 范畴, 则 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 是稳定范畴.

证明. 只需说明 $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{A})$ 为稳定子范畴即可. 即说明对于 $f: M_* \rightarrow N_* \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, 有映射锥 $C(f)_* \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. 为此, 只需说明 $C(f)_*$ 是纤维性对象即可, 而我们知道 $f: M_* \rightarrow N_*$ 可诱导出 Puppe 序列 $M_* \rightarrow N_* \rightarrow C(f) \rightarrow M_*[1] \rightarrow \cdots$, 而 $M_*[1]$ 为纤维性对象, 因此只需说明 $C(f)_* \rightarrow M_*[1]$ 是纤维化即可. 即对于任意平凡余纤维化 $A_* \rightarrow B_*$, 以下图表中虚线

$$\begin{array}{ccc} A_* & \longrightarrow & C_*(f) \\ \downarrow i & \nearrow & \downarrow \\ B_* & \longrightarrow & M_*[1] \end{array}$$

的存在性. 而这实际上可以由 $N_*[1]$ 关于 $C_*(i) \hookrightarrow C_*(\text{id}_B)$ 的提升性质得到. $\square$

注意到由于警告 3.1.36 的存在, 我们不能直接使用定义-命题 2.1.1 说明我们所定义的 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 是 $\text{Ch}(\mathcal{A})$ 关于拟同构的逆, 但事实上, 它是成立的, 即我们所定义的 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 确实是定义 3.1.25 所给出的导出范畴.

命题 3.1.40. . 令 $\mathcal{A}$ 为 Grothendieck Abel 范畴, 则 $\mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ 是关于拟同构的 Bousfield 局部分化且 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 是 $\text{Ch}_*(\mathcal{A})$ 配上命题 3.1.35 所述模型结构后的底 $(\infty, 1)$ -范畴.

注记 3.1.41. . 从而根据注记 2.1.2 可知其为可表现范畴.

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.3.5.13, Proposition 1.3.5.14 配上 Proposition 1.3.5.15]. $\square$

最后, 来谈谈 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 上的 t-结构.

定义-命题 3.1.42. . 令 $\mathcal{A}$ 是 Grothendieck Abel 范畴, 则对于 $n \in \mathbb{Z}$, 定义

1. $\mathcal{K}_{\geq n}(\mathcal{A})$ 为由 $k < n$ 时 $H^k(M_*) \simeq 0$ 的链复形 M_* 所张成的全子范畴, 且记 $\mathcal{D}_{\geq n}(\mathcal{A}) := \mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}_{\geq n}(\mathcal{A})$;
2. $\mathcal{K}_{\leq n}(\mathcal{A})$ 为由 $k > n$ 时 $H^k(M_*) \simeq 0$ 的链复形 M_* 所张成的全子范畴, 且记 $\mathcal{D}_{\leq n}(\mathcal{A}) := \mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}_{\leq n}(\mathcal{A})$;

则 $(\mathcal{K}_{\geq 0}(\mathcal{A}), \mathcal{K}_{\leq 0}(\mathcal{A}))$ 构成 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 上的 t-结构且 $(\mathcal{D}_{\geq 0}(\mathcal{A}), \mathcal{D}_{\leq 0}(\mathcal{A}))$ 构成 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 上的 t-结构, 且其

- 可达 (定义 2.2.63);
- 右完备 (定义 2.2.59);
- 与滤余极限相容, 即 $\mathcal{D}_{\leq 0}(\mathcal{A})$ 关于 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 的滤余极限封闭.

警告 3.1.43. . 一般而言 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 不会是左完备的.

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.3.5.21] □

注记 3.1.44. . 在 3.2.2 节中我们将给出无界导出范畴的另一种刻画. 此外, [Lurie, 2018b, Appendix C] 中所描述的 **Grothendieck 预稳定范畴**, **非分离导出范畴** 以及关于导出范畴的左完备化的处理属于本讲义的遗珠, 感兴趣的读者可自行探索.

注记 3.1.45. . 此外, 导出范畴具有下降性质, 可参见 [Heyer and Mann, 2024, Proposition A.4.23]

3.1.4 导出范畴的泛性质

本节来揭示导出范畴的泛性质, 在本节中我们只研究 $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ 的泛性质, $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ 是对偶得到的.

定义 3.1.46. . 令 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 为配有 t -结构的稳定范畴,

- 称函子 $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ 为**右 t -正合**的是指其正合且将 $\mathcal{C}_{\geq 0}$ 映到 $\mathcal{C}'_{\geq 0}$;
- 称函子 $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ 为**左 t -正合**的是指其正合且将 $\mathcal{C}_{\leq 0}$ 映到 $\mathcal{C}'_{\leq 0}$;
- 称函子为 **t -正合**是指其既右 t -正合又左 t -正合.

导出范畴具有以下泛性质:

定理 3.1.47. . 令 $\mathcal{A}$ 为带有足够投射对象的 *Abel* 范畴, 且 $\mathcal{C}$ 为带有左完备的 t -结构的稳定范畴, 且 $\mathcal{E} \subseteq \text{Fun}(\mathcal{D}^-(\mathcal{A}), \mathcal{C})$ 为由全体将 $\mathcal{A}$ 中投射对象打到 $\mathcal{C}^\heartsuit$ 的右 t -正合函子所张成的全子范畴, 则 $F \mapsto \tau_{\leq 0} \circ (F|_{\mathcal{D}^-(\mathcal{A})^\heartsuit})$ 给出从 $\mathcal{E}$ 到 $\text{Fun}^{\text{rex}}(\mathcal{A}, \mathcal{C}^\heartsuit)$ 的范畴等价, 此处 Fun^{rex} 是右正合函子所张成的全子范畴.

注记 3.1.48. . 该泛性质相当于说: 给定右正合函子 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}^\heartsuit$, 它就可以以一种本质唯一的方式提升为稳定范畴间的右 t -正合函子 $\mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}$.

证明. [Lurie, 2017, Theorem 1.3.3.2]. □

因此, 我们可以得到一些有趣的结果:

例 3.1.49. . 根据命题 2.2.67, 我们知道 $\text{Sp}^\heartsuit \simeq \text{Ab}$. 因此给定函子 $\mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$ 就相当于给出函子 $\mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Sp}$. 我们称该函子为**广义 Eilenberg–MacLane 谱**. 特别地, 取 $\mathcal{A} = \text{Ab}$ 时, 所得到的函子为 $H: \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Sp}$, 简称 Eilenberg–MacLane 谱, 它是 Dold–Kan 对应的稳定版本.

例 3.1.50. . 经典的导出函子也可以通过上述泛性质进行解释, 给定右正合函子 $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, 它可以本质唯一的确定**左导出函子** $F: \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$.

最后, 我们来说明导出范畴是具有函子性的

命题 3.1.51. . 令 $\text{Cat}^{\text{proj}, \text{Ab}, \text{ex}, (1)} \subseteq \text{Cat}^{(1)}$ 为全体具有足够投射对象的 *Abel* 范畴及其间正合函子所张成的全子范畴, 则

$$\mathcal{D}^- : \text{Cat}^{\text{proj}, \text{Ab}, \text{ex}, (1)} \rightarrow \text{Cat}, \mathcal{A} \mapsto \mathcal{D}^-(\mathcal{A})$$

构成函子.

证明. 考虑范畴 $\text{Cat}^{\text{t}, \text{st}}$ 为带有 *t*-结构的稳定范畴及其间 *t*-正合函子所构成的范畴, 则取心给出函子 $(-)^{\heartsuit} : \text{Cat}^{\text{t}, \text{st}} \rightarrow \text{Cat}^{\text{proj}, \text{Ab}, \text{ex}, (1)}$. 而后令 $\mathcal{X} \subseteq \text{Cat}^{\text{t}, \text{st}}$ 为范畴等价于 $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ 的范畴所构成的范畴. 因此根据定理 3.1.47, $(-)^{\heartsuit}|_{\mathcal{X}}$ 是全忠实的, 从而为范畴等价. 取逆得到我们所求的 $\mathcal{D}^-$. $\square$

3.2 Lawever 理论与生象化

在本节中, 我们将讲述生象化所构建的同伦代数理论, 这种方式肇始于 Jiří Rosický 对于同伦代数的探索, Lurie 在 [Lurie, 2009b, § 5.5.8] 中将其称为非 *Abel* 导出范畴, 而这种方式将 *Set* 上代数结构变为其同伦版本的过程称为生象化, 或称导出代数.

3.2.1 生象化

为在一般的范畴 $\mathcal{C}$ 上研究代数结构, Francis William Lawvere 提出 **Lawvere 理论** 这一概念.

定义 3.2.1. . **Lawvere 理论**是指带有有限乘积的 1-范畴 $\mathbb{T}$.

Lawvere 理论将代数结构的计算记录于 $\mathcal{T}$ 的态射中.

定义 3.2.2. . 对于 Lawvere 理论 $\mathbb{T}$ 以及带有有限乘积的 1-范畴 $\mathcal{C}$, 定义 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathbb{T}$ -代数为保持乘积的函子

$$A : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{C}.$$

而 $\mathbb{T}$ -代数间的**同态**定义为函子间的自然变换, 将 $\mathbb{T}$ -代数所构成的范畴记为 $\mathbb{T}\text{-Alg}(\mathcal{C})$.

我们通过以下例子来体会前文中给出的说法:

例 3.2.3. . • 令 $\mathbb{T} = \text{Fin}^{\text{op}}$ 为有限集范畴的反范畴, 则 *Set* 中的 $\mathbb{T}$ -代数为集合, 且 $\mathbb{T}\text{-Alg}(\text{Set}) \simeq \text{Set}$, 此时也将 $\mathbb{T}$ 称为**集合的 Lawvere 理论**;

- 令 $\mathbb{T} = \text{FreeFinGroup}^{\text{op}}$ 为有限生成自由群范畴的反范畴, 记 $F(n)$ 为 n 个元素所张成的自由群, 则 $F(n) \sqcup F(m)$ 是 $F(n)$ 和 $F(m)$ 的自由积, 即为 $F(n+m)$, 因此在 $\mathbb{T}$ 中

有 $F(n) \simeq F(1)^n$. 那么此时令 A 为 $\mathbf{Set}$ 中的 $\mathbb{T}$ -代数, 且记 $G = A(F(1))$, 则可写出 G 上的代数运算为

$$G \times G \simeq A(F(2)) \xrightarrow{A((F(1) \rightarrow F(2))^{\text{op}})} A(F(1)) \simeq G$$

此处 $(F(1) \rightarrow F(2))^{\text{op}}$ 定义为将 $F(1)$ 的生成元映为 $F(2)$ 的两个生成元的乘积的映射之反. 从而 $\mathbb{T}\text{-Alg}(\mathbf{Set}) \simeq \mathbf{Group}$, 此时也将 $\mathbb{T}$ 称为**群的 Lawvere 理论**.

注意到在上例中我们总是将代数结构的 Lawvere 理论取为其内某种子范畴的反范畴, 我们引入以下术语对于这种结构进行规范化.

定义 3.2.4. . 令 $\mathcal{C}$ 为余完备 1-范畴, 称其为**代数范畴**是指存在具有有限余积的本质小全子范畴 $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ 使得其沿 Yoneda 嵌入 $y: \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathbf{Fun}_{\Pi}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \mathbf{Set})$ 诱导出范畴等价

$$\mathbf{Fun}_{\Pi}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \mathbf{Set}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$$

此处, $\mathbf{Fun}_{\Pi}$ 是指保持乘积的函子所构成的全子范畴.

例 3.2.5. . 例 3.2.3 中例子便可使用代数范畴的语言重述:

- $\mathbf{Set}$ 是代数范畴, 此时 $\mathcal{C}_0 \simeq \mathbf{Fin}$;
- $\mathbf{Group}$ 是代数范畴, 此时 $\mathcal{C}_0 \simeq \mathbf{FreeFinGroup}$.

以下给出更多例子:

- $\mathbf{Ab}$ 是代数范畴, 此时 $\mathcal{C}_0$ 为有限生成自由 Abel 群所构成的范畴;
- 令 R 为交换环, $\mathbf{Mod}_R$ 是代数范畴, 此时 $\mathcal{C}_0$ 为有限生成投射 R -模所构成的全子范畴;
- 令 R 为交换环, $R\text{-Alg}$ 是代数范畴, 此时 $\mathcal{C}_0$ 为有限生成多项式代数 $R[T_1, \dots, T_n]$, $n > 0$ 所张成的全子范畴;
- 凝聚集范畴 $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$ 是代数范畴, 此时 $\mathcal{C}_0$ 为极不连通 pro-有限集所构成的范畴 (此时其为大范畴, 但可沿小余极限生成 $\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$)¹;
- 凝聚 Abel 群范畴 $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ 是代数范畴, 此时 $\mathcal{C}_0$ 为由极不连通 pro-有限集 S 所生成的自由凝聚 Abel 群 $\mathbb{Z}[S]$ 的直和所构成的范畴 (也是大的);
- 凝聚环范畴 $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ring})$ 是代数范畴, 此时 $\mathcal{C}_0$ 为由极不连通 pro-有限集 S 所生成的自由凝聚 Abel 幺半群 $\mathbb{N}[S]$ 生成的自由凝聚 Abel 群 $\mathbb{Z}[\mathbb{N}[S]]$ 所构成的范畴, 读者可以发现, 这实际上是自由凝聚环所构成的范畴.

¹若考虑轻的版本无非是加上可度量条件.

使用紧投射对象可以更加精确地描述定义 3.2.4 中的 C_0 . 紧对象已在定义 2.1.23 中回顾, 现在来回顾投射对象定义 (对于以下定义进行 1-截断可得到 1-范畴的版本):

定义 3.2.6. . 令 C 为范畴, 称紧对象 $X \in C$ 是**投射**的指 $\text{Hom}_C(X, -): C \rightarrow \mathbf{Ani}$ 保持单纯对象的几何实现.

注记 3.2.7. . 上述定义中, 若直接定义**紧投射对象**, 则为 $\text{Hom}_C(X, -)$ 保持**筛余极限**², 不过由于此时我们已经选定 X 为紧对象, 因此只需保持几何实现 (筛余极限 = 几何实现 + 滤余极限). 此外, 几何实现的 1-截断是自反余等子.

命题 3.2.8. . 1-范畴 C 是代数范畴当且仅当 $C_0 \simeq C^{cp}$, 此处 C^{cp} 是紧投射对象所生成的子范畴.

证明. [Cesnavicius and Scholze, 2024, Proposition 5.1.2]. □

接下来我们的目标是探讨 $\mathbf{Ani}$ 上代数范畴的对应物.

定义 3.2.9. (非 Abel 导出范畴). 令 C 为带有限余积的范畴, 则 C 的**非 Abel 导出范畴** $\text{PSh}_\Sigma(C)$ 定义为 $\text{PSh}(C)$ 中保持乘积的预层所构成的全子范畴.

注记 3.2.10. . 根据 [Pstrągowski, 2023] 的建议. 在下文中, 我们将保持乘积的预层称为**球状预层**.

定义 3.2.11. . 令 C 为带有有限积的范畴, 记 $\mathbf{A} := \mathbf{sAlg}(C)$ 为全体保持乘积的 $F: C \rightarrow \mathbf{sSet}$ 所张成的全子范畴 (即取值于单纯集的代数结构). 则 $\mathbf{A}$ 具有以下单纯模型结构:

弱等价 弱等价对于全体 $c \in \mathbf{A}$, $\alpha(c): F(c) \rightarrow F'(c)$ 为单纯集的弱同伦等价的自然变换 $\alpha: F \Rightarrow F'$.

纤维化 纤维化为对于全体 $c \in \mathbf{A}$, $\alpha(c): F(c) \rightarrow F'(c)$ 为 Kan 纤维化的自然变换 $\alpha: F \Rightarrow F'$.

推论 3.2.12. . 有范畴等价 $N^{\text{hc}}(\mathbf{A}^\circ) \rightarrow \text{PSh}_\Sigma((C)^{\text{op}})$.

由此看出, 非 Abel 导出范畴实际上是关于 $\text{Fun}_\Pi(C, \mathbf{sSet})$ 的弱等价进行局部化, 因此生象集 (群/Abel 群/环) 范畴实际上是指单纯集 (群/Abel 群/环) 所构成的范畴 (而非 1-范畴).

证明. [Lurie, 2009b, Corollary 5.5.9.3]. □

不难发现, C 就是 Lawvere 理论 $\mathbb{T}$ 的反范畴, 或者说它起到定义 3.2.4 中 C_0 的作用, 因此可如下定义代数范畴在 $\mathbf{Ani}$ 上的版本.

定义 3.2.13. . 对于代数范畴 C , 称 C 的**生象化**为 C_0 的非 Abel 导出范畴, 记为 $\mathbf{Ani}(C)$.

以下给出例 3.2.5 所对应的生象化:

²关于筛余极限内容请见香蕉空间词条.

例 3.2.14. . • $\text{Ani}(\text{Set}) \simeq \text{Ani}$, 因此也称生象为生象集, 这表示生象是导出意义下的集合;

- $\text{Ani}(\text{Group}) \simeq \text{Grp}$, 即群的生象化为 $\mathbb{E}_1$ -群;
- 根据推论 3.2.12 以及命题 3.1.12, $\text{Ani}(\text{Ab}) \simeq \mathcal{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$;
- 类似地, 令 R 为交换环, 则 $\text{Ani}(\text{Mod}_R) \simeq \mathcal{D}_{\geq 0}(R)$;
- 令 R 为交换环, 则称 $\text{Ani}(R\text{-Alg})$ 为生象 R -代数;
- 根据 [Scholze and Clausen, 2019, Lemma 11.8], $\text{Ani}(\text{Cond}(\text{Set})) \simeq \text{Cond}(\text{Ani})$ 为凝聚态生象;
- $\text{Ani}(\text{Cond}(\text{Ab})) \simeq \mathcal{D}_{\geq 0}(\text{Cond}(\text{Ab}))$;
- $\text{Ani}(\text{Cond}(\text{Ring}))$ 被称为凝聚态生象环.

我们将代数范畴的生象化称为导出代数 (或生象代数), 基于其所得到的代数几何理论称为导出代数几何, 其中最全面的著作为 [Lurie, 2018b, Chapter 25] 以及 [Lurie, 2009a].

3.2.2 Abel 范畴的非 Abel 导出范畴

在 3.1.3 节我们使用微分分次脉的方式首次刻画了 Grothendieck Abel 范畴的无界导出范畴, 但是这种刻画方式没有那么“稳定同伦”. 在本节中, 我们将使用 [Pstrągowski, 2022, § 2.5] 另一种方式刻画无界导出范畴.

注记 3.2.15. . 在本节中, 我们会考虑取值于 Sp 上的预层 (实际上也可以考虑层), 这套理论可见于 [Lurie, 2018b, § 1.3.2]

记号 3.2.16. . 令 $\mathcal{C}$ 为带有有限余积的范畴, 则记 $\text{PSh}_{\Sigma}(\mathcal{C}, \text{Sp}) \subseteq \text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Sp})$ 为取值在 Sp 上的球状预层所构成的范畴. 若 $\mathcal{C}$ 为景 (或超完备景), 则类似定义 $\text{Shv}_{\Sigma}(\mathcal{C}, \text{Sp})$ (或 $\widehat{\text{Shv}}_{\Sigma}(\mathcal{C}, \text{Sp})$).

命题 3.2.17. . $\text{PSh}_{\Sigma}(\mathcal{C}, \text{Sp})$ 是 $\text{PSh}(\mathcal{C})$ 的稳定化 (定义 2.2.28). 特别地, 它是可表现稳定范畴.

证明. 这是 [Lurie, 2018b, Remark 1.3.2.2] 的变体. □

接下来给出生象化与 Grothendieck Abel 范畴间的关系.

命题 3.2.18. . 令 $\mathcal{A}$ 为 Grothendieck Abel 范畴, 同时为代数范畴, 则 $\mathcal{A}^{\text{cp}} \hookrightarrow \mathcal{A}$ 诱导出唯一的范畴等价 $\text{Ani}(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{D}_{\geq 0}(\mathcal{A})$.

证明. 这是 [Lurie, 2017, Proposition 1.3.3.14] 的变体. □

结合命题 3.2.17 可知

命题 3.2.19. . 令 $\mathcal{A}$ 为 *Grothendieck Abel* 范畴, 同时为代数范畴, 则 $\mathcal{A}^{\text{cp}} \hookrightarrow \mathcal{A}$ 诱导出唯一的范畴等价

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \simeq \text{PSh}_{\Sigma}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Sp}).$$

事实上, 可以去掉代数范畴这一条件, 不过需要引入合适的 *Grothendieck* 拓扑:

定义 3.2.20. . 令 $\mathcal{A}$ 为 *Grothendieck Abel* 范畴, 称全子范畴 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$ 为**紧生成元**是指:

- $\mathcal{P}$ 本质小;
- $\mathcal{P}$ 由紧对象构成;
- $\mathcal{P}$ 沿余极限生成 $\mathcal{A}$;
- $\mathcal{P}$ 包含零对象;
- $\mathcal{P}$ 沿满射的拉回封闭.

此时 $\mathcal{A}$ 上带有以下 *Grothendieck* 预拓扑以构成景: 定义

$$\text{Cov}(\mathcal{A}) := \{(V \twoheadrightarrow U)\}_{U \in \mathcal{C}},$$

即令单个态射为覆盖.

注记 3.2.21. . 注意到在证明 **Freyd–Mitchell 嵌入定理** 时我们就用过这个景.

以下定理说明只需要选取上述拓扑, 我们可以将 $\mathcal{A}$ 视为 $\text{Fun}_{\Pi}(\mathcal{P}^{\text{op}}, \text{Set})$ 沿上述 *Grothendieck* 预拓扑进行下降得到的层范畴.

定理 3.2.22. (Goerss–Hopkins). 令 $\mathcal{A}$ 为 *Grothendieck Abel* 范畴, $\mathcal{P}$ 为其内紧生成元. 则 *Yoneda* 嵌入 $y: \mathcal{P} \rightarrow \text{Fun}_{\Pi}(\mathcal{P}^{\text{op}}, \text{Set})$ 诱导出全忠实嵌入

$$\mathcal{A} \hookrightarrow \text{Fun}_{\Pi}(\mathcal{P}^{\text{op}}, \text{Set})$$

且其可进一步诱导出范畴等价

$$\mathcal{A} \simeq \text{Sh}_{\Sigma}(\mathcal{P}, \text{Set}).$$

证明. [Goerss and Hopkins, 2005, Proposition 2.1.12] □

定理 3.2.23. . 令 $\mathcal{A}$ 为 *Grothendieck Abel* 范畴, $\mathcal{P}$ 为其内任意紧生成元. 则 $\mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{A}$ 诱导出唯一的范畴等价

$$\widehat{\text{Shv}}_{\Sigma}(\mathcal{P}, \text{Sp}) \simeq \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

证明. [Pstrągowski, 2022, Theorem 2.64] □

Bibliography

- [Achim Krause, 2024] Achim Krause, Thomas Nikolaus, P. P. (2024). Sheaves on manifolds. <https://www.uni-muenster.de/IVV5WS/WebHop/user/nikolaus/Papers/sheaves-on-manifolds.pdf>.
- [BEKE, 2000] BEKE, T. (2000). Sheafifiable homotopy model categories. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 129(3):447–475.
- [Bott and Tu, 1982] Bott, R. and Tu, L. W. (1982). *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer New York.
- [Cesnavicius and Scholze, 2024] Cesnavicius, K. and Scholze, P. (2024). Purity for flat cohomology.
- [Cnossen, 2025a] Cnossen, B. (2025a). Introduction to higher algebra. <https://sites.google.com/view/bastiaan-cnossen/teaching/so25-introduction-to-higher-algebra>.
- [Cnossen, 2025b] Cnossen, B. (2025b). Introduction to stable homotopy theory (lecture course at university of regensburg). <https://sites.google.com/view/bastiaan-cnossen/introduction-to-stable-homotopy-theory>.
- [Cnossen et al., 2024] Cnossen, B., Haugseng, R., Lenz, T., and Linskens, S. (2024). Homotopical commutative rings and bispans.
- [Cohn, 2016] Cohn, L. (2016). Differential graded categories are k-linear stable infinity categories.
- [Davies and Tatum, 2024] Davies, J. and Tatum, L. (2024). Lecture notes for algebraic topology ii (stable and chromatic homotopy theory). https://www.dropbox.com/scl/fi/j73uavecb4gxkmb6uk80b/ATII_script.pdf?rlkey=2v7ezb2ie3bmu8rlig3kwq7qa&e=1&st=pu7m5wgm&dl=0.

Bibliography

- [Eilenberg and MacLane, 1945] Eilenberg, S. and MacLane, S. (1945). Relations between homology and homotopy groups of spaces. *Annals of Mathematics*, 46(3):480–509.
- [Goerss and Hopkins, 2005] Goerss, P. and Hopkins, M. (2005). Moduli problems for structured ring spectra. *preprint*, 1086.
- [Groth, 2016] Groth, M. (2016). Characterizations of abstract stable homotopy theories. <https://arxiv.org/abs/1602.07632>.
- [Hatcher, 2002] Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology*. Cambridge University Press.
- [Hebestreit, 2021] Hebestreit, F. (2021). Algebraic and hermitian k -theory. <https://florianadler.github.io/AlgebraBonn/KTheory.pdf>.
- [Heyer and Mann, 2024] Heyer, C. and Mann, L. (2024). 6-functor formalisms and smooth representations.
- [Lurie, 2009a] Lurie, J. (2009a). Derived algebraic geometry v: Structured spaces.
- [Lurie, 2009b] Lurie, J. (2009b). *Higher Topos Theory (AM-170)*. Princeton University Press.
- [Lurie, 2017] Lurie, J. (2017). Higher algebra. <https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf>.
- [Lurie, 2018a] Lurie, J. (2018a). Kerodon. <https://kerodon.net>.
- [Lurie, 2018b] Lurie, J. (2018b). Spectral algebraic geometry. <https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/SAG-rootfile.pdf>.
- [Muro et al., 2007] Muro, F., Schwede, S., and Strickland, N. (2007). Triangulated categories without models. *Inventiones mathematicae*, 170(2):231–241.
- [Pierre Deligne and Bernstein, 1983] Pierre Deligne, A. B. and Bernstein, J. (1983). Faisceaux pervers. *Astérisque*, 100.
- [Pstrągowski, 2022] Pstrągowski, P. (2022). Synthetic spectra and the cellular motivic category.
- [Pstrągowski, 2023] Pstrągowski, P. (2023). Moduli of spaces with prescribed homotopy groups.
- [Schlank and Yanovski, 2019] Schlank, T. and Yanovski, L. (2019). The ∞ -categorical eckmann–hilton argument. *Algebraic & Geometric Topology*, 19(6):3119–3170.

Bibliography

- [Scholze and Clausen, 2019] Scholze, P. and Clausen, D. (2019). Lectures on analytic geometry. <https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Analytic.pdf>.
- [Tabuada, 2004] Tabuada, G. (2004). Une structure de categorie de modeles de quillen sur la categorie des dg-categories.
- [Winges, 2024] Winges, C. (2024). Localisation and devissage in algebraic k-theory. https://homepages.uni-regensburg.de/~wic42659/ws23_devissage.html.
- [Zheng, 2024] Zheng, W. (2024). Lectures on homological algebra. <https://server.mcm.ac.cn/~zheng/homalg.pdf>.
- [李文威, 2024] 李文威 (2024). 代数学方法 (第二卷)—线性代数.
- [香蕉空间, 2021] 香蕉空间 (2021). 香蕉空间.